EUGEN POPA

CULEGERE DE PROBLEME DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI – 1981

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Lector dr. EUGEN POPA

CULEGERE DE PROBLEME DE ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

INTRODUCERE

Culegerea de față cuprinde enunțurile și soluțiile la peste 350 de probleme de analiză funcțională. Aproape toate aceste probleme au fost discutate în cadrul seminariilor ținute de autor la facultatea de matematică a Universității din Iași.

Se adresează în special studenților din anul IV fără frecvență și anul III zi, de la facultățile de matematică, care au în programul de învățămînt disciplina „Analiză funcțională". Culegerea poate fi consultată cu folos și de către studenții din anul II de la facultățile de matematică și fizică, precum și de la institutele politehnice și pedagogice.

Problemele sînt împărțite în 9 capitole, urmînd structura manualului „Introducere în analiza funcțională" de prof. N. Gheorghiu (Ed. Acad. R.S.R., București, 1974). În funcție de dificultate, enunțurile au fost marcate astfel: A — ușoare, B — mai grele (acestea avînd soluții integrale); problemele marcate + au, de regulă, în locul soluției, o trimitere bibliografică, fiind în general chestiuni mai dificile și urmărind acomodarea studenților cu parcurgerea altor texte, în afara manualului.

Pentru ușurarea consultării, culegerea conține un index de notații și un index terminologic. De asemenea, un număr de 12 figuri au fost intercalate în text.

Autorul mulțumește îndeosebi prof. dr. N. Gheorghiu, sub îndrumarea căruia s-au desfășurat majoritatea seminariilor ținute de autor; încurajările și indicațiile D-sale au contribuit esențial la existența acestei culegeri. De asemenea, conducerea unor seminarii la cursurile prof. dr. V. Barbu și conf. dr. T. Precupanu a

contribuit la îmbunătățirea și îmbogățirea lucrării; autorul își exprimă și pe această cale recunoștința sa. Discuțiile purtate cu lector dr. S. Frunză au contribuit la îmbunătățirea unor enunțuri și la eliminarea unor erori. În sfîrșit, cele mai sincere mulțumiri colectivului de analiză matematică din cadrul Facultății de matematică de la Universitatea din Iași, pentru atmosfera creată, propice lucrului.

AUTORUL

CUPRINS

		pag.	
	Enunțuri		*Soluții*
0. Preliminarii	7		
I. Algebră liniară și topologie generală	8	.....	49
II. Prelungirea funcționalelor liniare	10	.....	54
III. Spații liniare topologice	12	.....	57
IV. Spații local convexe	18	.....	75
V. Spații normate	24	.....	87
VI. Spații normate de aplicații liniare continue	29	.....	102
VII. Dualitate	33	.....	112
VIII. Spații Hilbert	37	.....	122
IX. Teorie spectrală	44	.....	141
Index de notații	153		
Index terminologic	154		
Bibliografie	155		

ENUNȚURI

0. PRELIMINARII

Fie T o mulțime oarecare. $\mathcal{P}(T)$ va desemna mulțimea părților lui T. Dacă X este o mulțime, vom nota X^T produsul cartezian $\prod_{t\in T} X_t$, unde $X_t = X$, $\forall\, t\in T$. X^T va fi identificat cu mulțimea funcțiilor $f: T \to X$, asociind fiecărei funcții f elementul $(f(t))_{t\in T} \in X^T$. Fie I o mulțime oarecare. Vom numi simbolul lui Kronecker și vom nota δ_{ij}, aplicația definită prin: $\delta_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$ și $\delta_{ii} = 1$.

Pentru noțiunile de topologie generală utilizate, recomandăm cartea „Elemente de topologie generală" de prof. dr. O. Costinescu [5]. Un mare număr de probleme de topologie generală se află reunite în „Topologie generală. Probleme" de O. Costinescu, C. Amihăesei, T. Bîrsan [6]. Dacă X este spațiu topologic și $A \subseteq X$, notăm ∂A frontiera lui A. Fie (X, τ) un spațiu topologic și $f: X \to \mathbf{R}$ o funcție oarecare. f se numește inferior semicontinuă în $x_0 \in X$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists V$ vecinătate a lui x_0, astfel încît $f(x) - f(x_0) > -\varepsilon$, $\forall x \in V$. Pentru o funcție oarecare $f: X \to \mathbf{R}$, numim suportul lui f și notăm supp f mulțimea $\overline{\{x\in X \mid f(x) \neq 0\}}$. Dacă (X, d) este spațiu metric, notăm $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$.

Pentru noțiunile de algebră liniară folosite recomandăm cartea „Algebră liniară" de prof. dr. doc. I. Creangă [7]. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ vor desemna, respectiv: mulțimea numerelor naturale, raționale, întregi, reale, complexe. $\mathbf{C}[X]$ va fi inelul polinoamelor cu coeficienți în $\mathbf{C}$. Fie X un spațiu liniar peste un corp K. O varietate liniară $V = x_0 + X_0$ din X se numește hiperplan dacă X_0 este subspațiu liniar maximal. Dacă H este hiperplan, iar $f: X \to \mathbf{R}$ o funcțională liniară astfel încît $X_0 = \operatorname{Ker} f$, atunci mulțimile $\{x\in X \mid f(x) \leqslant f(x_0)\}$ și $\{x\in X \mid f(x) \geqslant f(x_0)\}$ se numesc semispații determinate de hiperplanul H. O mulțime $V \subseteq X$ se numește simetrică dacă $V = -V$. Pentru o parte oarecare $A \subseteq X$, notăm: $\operatorname{co}(A)$, respectiv $\mathfrak{e}(A)$, respectiv $\mathcal{J}(A)$, cea mai mică mulțime convexă; respectiv cea mai mică mulțime echilibrată, respectiv cel mai mic subspațiu liniar, care conțin mulțimea A. Se spune că $A \subseteq X$ absoarbe $B \subseteq X$ dacă există $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda B \subseteq A$. În cazul în care intervin mai multe spații liniare, vom presupune că sînt peste același corp de scalari.

Pentru noțiunile de teoria măsurii utilizate, recomandăm cartea „Funcții reale" de conf. dr. A. Precupanu [18]. Pentru noțiunile de teoria funcțiilor de o variabilă complexă, se poate consulta „Funcții complexe" de N. Boboc [2].

Reamintim că, dacă $\{x_n\}$ este un șir de numere reale, se notează $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} (\sup_{n\geqslant k} x_n)$ și $\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} (\inf_{n\geqslant k} x_n)$. Fie $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n$ un multiindice. Notăm $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ și $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$. Prin $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se notează spațiul claselor de funcții egale a.p.t., integrabile pe fiecare compact din $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$.

Notațiile și noțiunile folosite fără explicație sînt în conformitate cu utilizarea din: „Analiză funcțională" de prof. dr. N. Gheorghiu. Singurele excepții sînt: utilizarea notației Ker în loc de N, pentru a desemna nucleul unei aplicații liniare și T' în loc de T^*, utilizat în § 6.23 din manual.

Referințele în interiorul culegerii se dau după cum urmează: dacă se face trimiterea la un exercițiu din același capitol, se menționează numai numărul exercițiului; dacă se face trimiterea la un exercițiu din alt capitol, se indică capitolul și numărul exercițiului.

I. ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI TOPOLOGIE GENERALĂ

1. Fie X un spațiu liniar, $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ o bază algebrică în X. Fie Y spațiu liniar și $f_0 : \mathcal{B} \to Y$ o aplicație oarecare. Să se arate că există și este unică o aplicație liniară $f : X \to Y$, astfel încît $f | \mathcal{B} = f_0$ (f se numește prelungirea prin liniaritate a lui f_0).

2. Fie X un spațiu liniar, $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ o bază algebrică în X. Definim $e_i^* : \mathcal{B} \to K$ prin $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Prelungind e_i^* prin liniaritate (cf. ex. 1), să se arate că $\{e_i^*\}_{i \in I}$ formează o mulțime liniar independentă în X^a.

3. Fie X spațiu liniar și $x \in X$. Definim $\varphi(x) : X^a \to K$ prin $\varphi(x)(x^*) = x^*(x)$, $\forall x^* \in X^a$. Să se verifice că $\varphi(x) \in X^{aa}$, $\forall x \in X$, iar $\varphi : X \to X^{aa}$ astfel definită, este o aplicație liniară și injectivă.

4. Fie X spațiu liniar și $A \subseteq X$ o parte oarecare. Notînd $A^0 = \{f \in X^a \mid f(a) = 0, \forall a \in A\}$, să se verifice că A^0 este subspațiu liniar în X^a. Pentru fiecare $B \subseteq X^a$ notăm ${}^0B = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in B\}$. Să se verifice că ${}^0B$ este subspațiu liniar în X. Pentru orice $A \subseteq X$, să se arate că ${}^0(A^0) = \mathcal{J}(A)$.

5. a) Fie X spațiu liniar, $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar. Să se arate că surjecția canonică $X \to X/X_1$ stabilește o bijecție, care conservă ordinea între subspațiile lui X/X_1 și subspațiile lui X, care conțin X_1.

b) Să se arate că intersecția tuturor subspațiilor liniare maximale din X este $\{0\}$. Să se deducă de aici că orice subspațiu liniar din X, diferit de X, coincide cu intersecția tuturor subspațiilor liniare maximale, care-l conțin.

6. Fie X spațiu liniar iar $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar maximal. Să se arate că X_1^0 este de dimensiune algebrică 1 și că, pentru orice $f \in X_1^0 \setminus \{0\}$, avem $\operatorname{Ker} f = X_1$. Reciproc, pentru orice $f \in X^a \setminus \{0\}$, avem $\{f\}^0 = \operatorname{Ker} f$. Să se regăsească astfel rezultatele din manual, § 1.37.

7. a) Fie X spațiu liniar. Pentru fiecare $x \in X$ definim $\varphi_x : K \to X$ prin $\varphi_x(\lambda) = \lambda x$. Să se arate că $x \to \varphi_x$ este un izomorfism de spații liniare, între X și $L_a(K, X)$.

b) Să se arate că X^n este izomorf cu $L_a(K^n, X)$ (vom nota $X^n = X^{n-1} \oplus X$).

8. Fie X spațiu liniar, X_1, $X_2 \subseteq X$ subspații liniare. Dacă $X_1^0 = X_2^0$, atunci $X_1 = X_2$.

9. Fie X_1, X_2, Y spații liniare. Definim $\varphi : L_a(X_1 \oplus X_2, Y) \to L_a(X_1, Y) \oplus L_a(X_2, Y)$ astfel: $\varphi(T) = (T_1, T_2)$, unde $T_1(x) = T(x, 0)$ și $T_2(x) = T(0, x)$. Să se arate că φ este aplicație liniară și bijectivă. Să se explicite inversa.

10. Fie X spațiu liniar, A, $B \subseteq X$ două mulțimi convexe, nevide și disjuncte. Să se arate că există C, $D \subseteq X$, mulțimi convexe și disjuncte, astfel încît $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ și $X = C \cup D$.

11. Fie X, Y spații liniare de dimensiune algebrică finită; $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază algebrică în X; $\{f_1, ..., f_m\}$ o bază algebrică în Y; iar $\alpha_{ij} \in K (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$. Să definim $T : X \to Y$ astfel: dacă $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ atunci $Tx = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \right) f_j$. a) Să se verifice că T este o aplicație liniară. b) Reciproc, să se arate că, pentru fiecare $T \in L_a(X, Y)$, există și sînt unic determinați scalarii $\alpha_{ij} \in K$, astfel încît T să fie definit prin formula de mai sus (matricea (α_{ij}) se numește matricea asociată operatorului T, bazele $\{e_i\}$ și $\{f_j\}$ fiind fixate).

12. Fie X mulțime nevidă, τ o topologie pe X. Pentru fiecare $x \in X$ notăm $\mathcal{V}_\tau(x) = \{V \subseteq X \mid \exists D \in \tau$ cu $x \in D \subseteq V\}$. Să se arate că sînt îndeplinite condițiile: α) $\mathcal{V}_\tau(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$. β) $V \in \mathcal{V}_\tau(x) \Rightarrow x \in V$. γ) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x)$. δ) $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$ și $W \supseteq V \Rightarrow W \in \mathcal{V}_\tau(x)$. ε) $V \in \mathcal{V}_\tau(x) \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_\tau(x)$ astfel încît $V \in \mathcal{V}_\tau(y)$, $\forall y \in W$. ($\mathcal{V}_\tau(x)$ se numește sistemul vecinătăților lui x, în topologia τ).

13. Fie X mulțime nevidă și să presupunem dată, pentru fiecare $x \in X$, o mulțime de părți ale lui X, notată $\mathcal{V}(x)$, avînd proprietățile α) —ε) de la ex. 12. Notăm: $\tau_V = \{\emptyset\} \cup \{D \subseteq X \mid \forall x \in D, D \in \mathcal{V}(x)\}$. Să se verifice că τ_V este o topologie pe X.

14. Fie X o mulțime nevidă și τ o topologie pe X. Fie $\mathcal{V}_\tau(x)$ mulțimea de părți ale lui X, definită la ex. 12; fie τ_V topologia asociată cu $\mathcal{V}_\tau$, ca în ex. 13.

a) Să se arate că $\tau = \tau_V$.

b) Fie X o mulțime nevidă și să presupunem dată, pentru fiecare $x \in X$, o mulțime de părți $\mathcal{V}(x)$ ale lui X, cu proprietățile α) —ε) ca în ex. 12. Fie τ_V topologia definită în ex. 13. Să se verifice că $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_{\tau_V}(x)$, $\forall x \in X$.

15. Fie X o mulțime nevidă și, pentru fiecare $x \in X$, o mulțime $\mathcal{U}(x)$ de părți ale lui X, avînd proprietățile: α') $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$. β') $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$. γ') $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists U_3 \in \mathcal{U}(x)$, încît $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. δ') $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}(x)$ încît $\forall y \in V \ \exists W \in \mathcal{U}(y)$, cu $W \subseteq U$. Să se arate că, pentru fiecare $x \in X$, există o mulțime de părți ale lui X, $\mathcal{V}(x)$, unic determinată de condițiile: — au loc proprietățile α) —ε) din ex. 12. — — $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in X$. — $\forall V \in \mathcal{V}(x) \ \exists U \in \mathcal{U}(x)$ încît $U \subseteq V$. ($\mathcal{U}(x)$ se numește sistem fundamental de vecinătăți ale punctului x.)

16. a) Fie X o mulțime și $\tau = \{\emptyset, X\}$ (topologia grosieră). Să se demonstreze că singurele mulțimi închise sînt $\emptyset$ și X; închiderea oricărei mulțimi nevide este X; interiorul oricărei mulțimi diferite de X este vid; orice șir converge la orice punct; $\forall x \in X$, $\mathcal{V}(x) = \{X\}$; oricare ar fi (Y, τ') un spațiu topologic și $f : Y \to X$ o funcție, f este continuă; orice parte a lui X este quasi-compactă; dacă X are mai mult decît un punct, (X, τ) nu este separat.

b) Fie X o mulțime și $\tau = \mathcal{P}(X)$ (topologia discretă). Să se demonstreze că: orice mulțime este închisă; singurele șiruri convergente sînt șirurile constante, de la un anumit rang; $\forall x \in X$, $\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X, x \in V\}$ este sistemul vecinătăților punctului x; $\forall x \in X$, $\mathcal{U}(x) = \{\{x\}\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x; oricare ar fi (Y, τ') spațiu topologic și $f : X \to Y$ funcție, f este continuă; o mulțime din X este compactă dacă și numai dacă este finită; (X, τ) este separat Hausdorff.

17. Fie (X, ρ) un spațiu metric compact, $\{x_n\}$ un șir din X. Notînd $F_n = \overline{\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}$, să se arate că familia $\{F_n\}$ are intersecția nevidă. Deci pentru fiecare $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, există un subșir $\{x_{n_k}\}$ convergent la x.

18. Fie $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ o familie de spații topologice. Notăm $\mathcal{B}$ mulțimea acelor părți $A \subseteq \prod_{i=I} X_i$, de forma $A = \prod_{i \in I} A_i$, unde $A_i \in \tau_i$, iar mulțimea $\{i \in I \mid A_i \neq X_i\}$ este finită. Să se verifice că $\mathcal{B}$ este o bază de mulțimi deschise, pentru o topologie pe $X = \prod_{i \in I} X_i$ (numită topologia produs). Să se arate că proiecțiile $\mathrm{pr}_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ sînt continue. τ este cea mai puțin fină topologie pe X, pentru care toate proiecțiile sînt continue.

19. Cu notațiile din ex. 18, (X, τ) este compact dacă și numai dacă fiecare (X_i, τ_i) este compact (teorema lui Tihonov).

20. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^n$ o mulțime deschisă. Dacă d este distanța euclidiană și $K_n = \{x \in X \mid d(x, 0) \leqslant n,\ d(x, \complement A) \geqslant n^{-1}\}$, să se arate că:

1) K_n este compact, $\forall n \in \mathbf{N}$.

2) $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$.

3) $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

4) $\forall K \subseteq A$ compact, $\exists n_0$ încît $K \subseteq K_{n_0}$ ($\{K_n\}$ se numește *exhaustiune cu compacte pentru* A).

21. a) Fie $\{(X_n, \rho_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ spații metrice. Să se arate că $\prod_{n \in \mathbf{N}} X_n$ înzestrat cu topologia produs (conform ex. 18) este metrizabil, iar o metrică este: $\rho((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \dfrac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}$.

b) Să se arate că $\prod_{n \in \mathbf{N}} X_n$ este complet dacă și numai dacă fiecare X_n este complet.

II. PRELUNGIREA FUNCȚIONALELOR LINIARE

A 1. Să se verifice că $p(x) = \limsup_{n \to \infty} x_n$ este o funcțională convexă pe spațiul m, dar nu este nici seminormă, nici funcțională liniară.

A 2. Fie $X \neq \{0\}$ spațiu liniar, $\mathcal{B}$ bază algebrică în X, iar $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$. Dacă $x = \sum_{x_i \in \mathcal{B}} \lambda_i x_i$ iar $p(x) = \sum_{x_i \in \mathcal{B}_0} |\lambda_i|$, să se verifice că p este seminormă pe X; p este normă dacă și numai dacă $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$.

A 3. a) Fie X spațiu liniar, p seminormă pe X. Să se verifice că mulțimea $\operatorname{Ker} p = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$ este subspațiu liniar în X.

b) Dacă definim $\widehat{p} : X/\operatorname{Ker} p \to \mathbf{R}_+$ prin $\widehat{p}(x + \operatorname{Ker} p) = p(x)$, să se arate că $\widehat{p}$ este o normă pe $X/\operatorname{Ker} p$.

c) Folosind cele de mai sus, să se arate că orice seminormă neidentic nulă pe $\mathbf{R}$ este normă.

A 4. Fie $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $p(x) = \beta x$ dacă $x < 0$ și $p(x) = \alpha x$ dacă $x \geqslant 0$.

a) Să se indice condițiile necesare și suficiente asupra lui α și β, astfel încît p să fie funcțională convexă.

b) Reciproc, dacă $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este funcțională convexă, să se arate că există α și β (unic determinați) astfel încît p să fie de forma indicată mai sus. Să se regăsească rezultatul de la ex. 3c).

A 5. Fie X spațiu topologic, $\mathcal{C}(X)$ mulțimea funcțiilor continue $f : X \to \mathbf{R}$, organizată ca spațiu liniar cu operațiile uzuale.

a) Dacă $K \subseteq X$ este compact, atunci $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ este seminormă pe X.

b) Dacă X este complet regulat, atunci p_K este normă dacă și numai dacă $X = K$.

A 6. Fie $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ mulțime deschisă, nevidă; notăm $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mulțimea funcțiilor $f : \Omega \to \mathbf{R}$, care admit derivate parțiale de orice ordin, organizată ca spațiu liniar cu operațiile uzuale. Pentru $K \subseteq \Omega$ compact și $n \in \mathbf{N}$ notăm $p_{K,n}(f) = \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leqslant n}} |D^k f(x)|$, $p_{K,n}$ este seminormă pe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

A 7. Să se verifice că $f \to \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$ este o seminormă pe $\mathcal{L}^p([0, 1])$, dar nu este o normă ($p \geqslant 1$).

A 8. Fie X, Y spații liniare, $T \in L_a(X, Y)$ iar p o seminormă (respectiv funcțională convexă) pe Y. Atunci $q(x) = p(Tx)$ este seminormă (respectiv funcțională convexă) pe X.

A 9. Fie X spațiu liniar real, p o funcțională convexă pe X. Notăm: $X_1 = \{x \in X \mid p(x) + p(-x) = 0\}$.

a) Să se arate că X_1 este subspațiu liniar.

b) Fie X_2 un complement algebric al lui X_1 în X, iar $f : X_2 \to \mathbf{R}$ o funcțională liniară care satisface $f(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X_2$. Să se arate că există și este unică o funcțională liniară $F : X \to \mathbf{R}$, astfel încît $F | X_2 = f$ și $F(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$. Dacă $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$ atunci $F(x_1 + x_2) = p(x_1) + f(x_2)$.

B 10. Fie $x \in m$ și $q(x) = \inf \lim \sup_{k \to \infty} p^{-1} \sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i}$ (unde marginea inferioară este considerată pe mulțimea tuturor familiilor $\{p, n_1, ..., n_p\}$ de numere naturale). Să se verifice că q este o funcțională convexă, neidentic nulă, pe m.

A 11. Fie X spațiu liniar real (respectiv complex), p funcțională convexă (respectiv seminormă), iar $\mathcal{F}$ mulțimea funcționalelor liniare reale (respectiv complexe) majorate (respectiv în modul) de p. Să se arate că $p(x) = \sup \{f(x) | f \in \mathcal{F}\}$ (respectiv $p(x) = \sup \{|f(x)| | f \in \mathcal{F}\}$), $\forall x \in X$.

A 12. Fie X spațiu liniar real și $p : X \to \mathbf{R}$ aplicație oarecare. Atunci ($p \in X^a$) $\Leftrightarrow$ (p este funcțională convexă și există o singură funcțională liniară pe X, majorată de p).

B 13. Fie X spațiu liniar.

a) Fie $f, g_1, ..., g_n$ funcționale liniare pe X, satisfăcînd: $\operatorname{Ker} f \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} g_i$. Să se arate că există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n$ astfel încît $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$, $\forall x \in X$.

b) Dacă $f_i \in X^a$ ($i = 1, ..., n$) este o familie liniar independentă în X^a, atunci există $x_i \in X$ ($i = 1, ..., n$) astfel încît $f_i(x_j) = \delta_{ij}$.

B 14. Fie X_1, X_2 spații liniare reale, p_1, p_2 funcționale convexe pe X_1, respectiv X_2.

a) Să se arate că $p(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$ este o funcțională convexă pe $X_1 \times X_2$.

b) Fie X spațiu liniar real, p_1, p_2 funcționale convexe pe X, iar $f \in X^a$ satisfăcînd $f(x) \leqslant p_1(x) + p_2(x)$, $\forall x \in X$. Să se arate că există f_1, $f_2 \in X^a$ astfel încît: $f = f_1 + f_2$, $f_i(x) \leqslant p_i(x)$, $\forall\, x \in X$, $i = 1, 2$.

A 15. Fie X spațiu liniar, $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar, iar p seminormă pe X. Să se arate că $p(x + X_1) = \inf \{p(u) \mid u - x \in X_1\}$ este seminormă pe spațiul cît X/X_1.

A 16. Fie X spațiu liniar real, $x_0 \in X$ iar p o funcțională convexă pe X. Să se arate că, pentru fiecare $\lambda \in [-p(-x_0), p(x_0)]$, există $f \in X^a$ astfel încît $f(x_0) = \lambda$ și $f(x) \leqslant p(x)$, $\forall\, x \in X$.

III. SPAȚII LINIARE TOPOLOGICE

Pentru prescurtare, se va scrie s.l.t. în loc de spațiu liniar topologic.

A 1. Fie X spațiu liniar și $A \subseteq X$.

a) Dacă A este convexă, $x_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ și $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, atunci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$.

b) Să se arate că înfășurătoarea convexă a mulțimii A coincide cu mulțimea: $\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \mathbf{N},\ \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ x_i \in A,\ i = 1, \ldots, n \right\}$.

c) Înfășurătoarea convexă a unei mulțimi echilibrate este echilibrată.

A 2. Fie X un spațiu liniar și $A \subseteq X$.

a) Să se arate că înfășurătoarea echilibrată a lui A coincide cu mulțimea $\{\lambda x \mid x \in A,\ |\lambda| \leqslant 1\}$.

b) Să se dea un exemplu de mulțime convexă, a cărei înfășurătoare echilibrată nu este convexă.

A 3. Fie X spațiu liniar, $x, y \in X$. Să se indice o condiție necesară și suficientă pentru ca înfășurătoarea echilibrată a mulțimii $\{x, y\}$ să fie convexă.

A 4. Fie X, Y spații liniare, $f : X \to Y$ aplicație liniară, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

a) Dacă A convexă (respectiv echilibrată) atunci $f(A)$ este convexă (respectiv echilibrată).

b) Dacă B este convexă (respectiv echilibrată, respectiv absorbantă) atunci $f^{-1}(B)$ este convexă (respectiv echilibrată, respectiv absorbantă).

c) Dacă f este surjectivă iar A este absorbantă, atunci $f(A)$ este absorbantă.

A 5. Fie X, Y spații liniare, $f : X \to Y$ aplicație liniară, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

a) Să se arate că $\mathrm{co}(f(A)) = f(\mathrm{co}(A))$; $\varepsilon(f(A)) = f(\varepsilon(A))$.

b) $\mathrm{co}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{co}(B))$. Să se dea un exemplu în care această incluziune este strictă.

c) $\mathrm{co}(x + A) = x + \mathrm{co}(A)$, $\forall\, x \in X$.

A 6. Mulțimea $A = \left\{(x_n) \in l^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n \mid x_n \mid^2 \leqslant 1\right\}$ este convexă și echilibrată în l^2, dar nu este absorbantă.

A 7. Fie X spațiu liniar, $A, B, \subseteq X$ mulțimi convexe. Atunci $\text{co}(A \cup B) = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid a \in A,\ b \in B,\ \lambda \in [0, 1]\}$.

A 8. Fie X spațiu liniar, $A \subseteq X$ mulțime echilibrată. A este absorbantă dacă și numai dacă, pentru fiecare $x \in X$, există $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda x \in A$.

A 9. Dacă X este s.l.t. și $A \subseteq X$ o mulțime închisă, A este convexă dacă și numai dacă, pentru orice $x, y \in A$, avem $\frac{1}{2}(x + y) \in A$.

A 10. Fie X s.l.t. și $A, B \subseteq X$.

a) Dacă A este deschisă, atunci $A + B$ este deschisă.

b) Dacă X este separat, iar A și B sînt compacte, $A + B$ este compact.

c) Dacă X este separat, A este compactă și B este închisă, atunci $A + B$ este închisă.

d) Să se construiască două mulțimi închise A, B (din $\mathbf{R}$) astfel încît $A + B$ să nu fie închisă.

A 11. Fie X s.l.t. și $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar. Atunci $\overset{\circ}{X}_1 \neq \emptyset$ dacă și numai dacă $X_1 = X$.

A 12. Fie X s.l.t. iar $\mathcal{V}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Să se arate că X este separat dacă și numai dacă $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \{0\}$.

A 13. Fie $X \neq \{0\}$ un spațiu liniar. Să se arate că X, înzestrat cu topologia discretă, nu este s.l.t.

A 14. Fie X s.l.t., $A \subseteq X$ și $\mathcal{V}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Să se arate că $\bar{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A + V)$. Să se compare cu exercițiul 12.

A 15. Fie X s.l.t. separat, K_1, K_2 două mulțimi compacte și convexe din X. Atunci $\text{co}(K_1 \cup K_2)$ este mulțime compactă.

B 16. Fie X s.l.t. și $A \subseteq X$ mulțime convexă.

a) Dacă $x \in \overset{\circ}{A}$ și $y \in \bar{A}$ atunci $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in (0, 1]\} \subseteq \overset{\circ}{A}$.

b) $\overset{\circ}{A}$ și $\bar{A}$ sînt mulțimi convexe. Dacă $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ atunci $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$ și $\bar{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

A 17. Fie X s.l.t. și $A \subseteq X$.

a) Să se arate că $\text{co}(\bar{A}) \subseteq \overline{\text{co}(A)}$. Alegînd $X = \mathbf{R}^2$ să se arate că incluziunea precedentă poate fi și strictă. Deci înfășurătoarea convexă a unei mulțimi închise nu este neapărat închisă.

b) Să se arate că $\text{co}(\overset{\circ}{A}) \subseteq \overset{\circ}{\text{co}(A)}$. Să se dea un exemplu în care această incluziune să fie strictă.

A 18. Orice s.l.t. este conex și local conex.

A 19. Fie X s.l.t.

a) Dacă $X_1 \subseteq X$ este subspațiu liniar, atunci $\overline{X_1}$ este subspațiu liniar.

b) Dacă $H \subseteq X$ este hiperplan, atunci H este: fie dens, fie închis în X.

B 20. Fie X s.l.t. separat, de dimensiune algebrică n. Atunci X este homeomorf cu Γ^n, cu topologia uzuală. În particular, orice subspațiu finit dimensional, al unui s.l.t. separat, este închis.

A 21. Fie X s.l.t. separat, de dimensiune algebrică finită, Y s.l.t. separat și $f : X \to Y$ o aplicație liniară. Să se arate că f este continuă.

A 22. Fie X s.l.t., $M \subseteq X$ subspațiu închis, $N \subseteq X$ subspațiu de dimensiune algebrică finită. Atunci $M + N$ este subspațiu liniar închis. Contraexemplu cînd N este închis, dar nu are dimensiune algebrică finită?

B 23. Un s.l.t. separat este metrizabil dacă și numai dacă posedă un sistem fundamental numărabil de vecinătăți ale originii. În acest caz, se poate indica o metrică compatibilă cu topologia și care să fie invariantă la translații (adică $d(x + x_0, y + x_0) = d(x, y)$, $\forall x_0 \in X$).

B 24. Fie X spațiu liniar și $\mathcal{U}$ o mulțime de părți ale lui X, cu proprietățile:

(*i*) $V_1, V_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\, V_3 \in U$, cu $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$;

(*ii*) $\forall\, V \in \mathcal{U}$, $\exists\, V_1 \in \mathcal{U}$ încît $V_1 + V_1 \subseteq V$;

(*iii*) $\forall\, V \in \mathcal{U}$, V este absorbantă și echilibrată.

Să se arate că există o singură topologie pe X, care să fie compatibilă cu structura de spațiu liniar și în care $\mathcal{U}$ să fie sistem fundamental de vecinătăți ale originii.

A 25. Fie X s.l.t. iar V o vecinătate a originii. Să se arate că există o vecinătate V_1 a originii, astfel încît $\overline{V_1} \subseteq V$. Deci, orice s.l.t. este regulat (spațiu T_3).

A 26. Fie X spațiu liniar, τ o topologie pe X, astfel încît:

(*i*) $(x, y) \to x + y$ este continuă pe $X \times X$.

(*ii*) $\lambda \to \lambda x_0$ este continuă în 0, $\forall x_0 \in X$;

(*iii*) $(\lambda, x) \to \lambda x$ este continuă în (0,0).

Să se arate că τ este compatibilă cu structura de spațiu liniar.

A 27. Pentru $\varepsilon > 0$ și $\mu \in \mathbf{C}$ notăm: $S(\mu; \varepsilon) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im}(\lambda - \mu)| < \varepsilon\}$. Să se verifice că $\{S(\mu; \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale lui μ într-o topologie compatibilă cu structura de spațiu liniar real a lui $\mathbf{C}$ (deci considerînd $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$), dar necompatibilă cu structura de spațiu liniar complex a lui $\mathbf{C}$.

A 28. Fie $\{X_i\}_{i \in I}$ s.l.t. și X spațiu liniar, iar $f_i : X \to X_i$ aplicații liniare. X, înzestrat cu cea mai puțin fină topologie pentru care toate aplicațiile f_i sînt continue, este s.l.t. În particular, dacă $X = \prod_{i \in I} X_i$, atunci X, înzestrat cu topologia produs, este s.l.t.

B 29. a) Fie $\{X_i\}_{i \in I}$ s.l.t. și să notăm $\bigoplus_{i \in I} X_i$ mulțimea elementelor $(x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ astfel încît $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ este o mulțime finită. Pentru $i_0 \in I$ notăm $\varepsilon_{i_0} : X_{i_0} \to \bigoplus_{i \in I} X_i$ aplicația $\varepsilon_{i_0}(x) = (x_i)$, unde $x_{i_0} = x$ și $x_i = 0$, dacă $i \neq i_0$. Să se verifice că $\bigoplus_{i \in I} X_i$ este spațiu liniar, ε_{i_0} este aplicație liniară. $\bigoplus_{i \in I} X_i$ înzestrat cu cea mai puțin fină topologie pentru care ε_i, $\forall\, i \in I$, sînt continue, este s.l.t. (numit suma directă a s.l.t. X_i). Incluziunea $\bigoplus_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$ este continuă.

b) Fie X s.l.t., Y spațiu liniar, $f : X \to Y$ aplicație liniară surjectivă. Y, înzestrat cu cea mai fină topologie pentru care f este continuă, este s.l.t. În particular, dacă X este s.l.t. și $X_1 \subseteq X$ este subspațiu liniar, atunci spațiul liniar cît X/X_1, înzestrat cu cea mai fină topologie pentru care surjecția canonică $X \to X/X_1$ este continuă, este s.l.t.

A 30. a) Fie X s.l.t. și $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar. Să se arate că X/X_1 (conform ex. 29) este separat dacă și numai dacă X_1 este închis.

b) Dacă $X_1 = \overline{\{0\}}$, spațiul liniar topologic X/X_1 se numește s.l.t. separat asociat lui X. Să se arate că, pentru orice s.l.t. separat Y și orice aplicație

liniară continuă $f : X \to Y$, există și este unică aplicația liniară și continuă $\tilde{f} : X/X_1 \to Y$ astfel încît $\tilde{f}\circ p = f$, unde $p : X \to X/X_1$ este surjecția canonică.

A 31. Fie X s.l.t. și $A \subseteq X$. A se numește *mărginită* dacă, pentru fiecare vecinătate V a originii, există $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda A \subseteq V$.

a) Dacă A este mărginită, atunci $\overline{A}$ este mărginită; $\forall\, \alpha \in \Gamma$, αA este mărginită; orice $B \subseteq A$ este mărginită.

b) Dacă A, B sînt mărginite, atunci $A \cup B$ și $A + B$ sînt mărginite.

c) Următoarele condiții sînt echivalente: (*i*) A este mărginită. (*ii*) Orice parte numărabilă din A este mărginită. (*iii*) Pentru orice șir $x_n \in A$ și orice șir $\lambda_n \in \Gamma$, cu $\lambda_n \to 0$, avem $\lambda_n x_n \to 0$.

A 32. Fie X s.l.t.

a) Înfășurătoarea echilibrată a unei mulțimi mărginite (conform ex. 31) este mărginită.

b) Dacă A este echilibrată atunci $\overline{A}$ este echilibrată; iar $\overset{\circ}{A}$ este echilibrată dacă și numai dacă $0 \in \overset{\circ}{A}$.

c) Să se arate că $\varepsilon(\overline{A}) \subseteq \overline{\varepsilon(A)}$. Să se arate că incluziunea precedentă poate fi strictă.

A 33. Fie $X_1, \ldots, X_n$ Y s.l.t. și $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ o aplicație multiliniară, f este continuă dacă și numai dacă este continuă în origine.

A 34. Fie X, Y s.l.t. și f: $X \to Y$ aplicație liniară continuă. Dacă $A \subseteq X$ este mărginită (conform ex. 31) atunci $f(A)$ este mărginită.

A. 35. Fie X s.l.t. separat iar $K \subseteq X$ compact. Înfășurătoarea echilibrată a lui K este compactă.

A 36. Fie T o mulțime, X s.l.t. și $\sigma \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu proprietatea: $S_1, S_2 \in \sigma \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\, S_3 \in \sigma$ încît $S_1 \cup S_2 \subseteq S_3$. Fie $G \subseteq X^T$ un subspațiu liniar, $S \in \sigma$ și V o vecinătate a originii în X; notăm: $M(S, V) = \{f \in G \mid f(S) \subseteq V\}$. Să se arate că $\{M(S, V)\}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale originii, într-o topologie pe G, compatibilă cu structura de spațiu liniar, dacă și numai dacă, pentru fiecare $f \in G$ și $S \in \sigma$, mulțimea $f(S)$ este mărginită în X (această topologie se numește topologia σ-convergenței uniforme). În această topologie, $f_n \to 0$ dacă și numai dacă, pentru fiecare V, vecinătate a originii în X și $S \in \sigma$, există $n_{V,S} \in \mathbf{N}$ astfel încît $f_n(S) \subseteq V$, $\forall\, n \geqslant n_{V,S}$. Dacă X este separat și $\bigcup_{S \in \sigma} S = T$, atunci X^T este separat. Dacă σ este mulțimea părților finite ale lui T, atunci topologia σ-convergenței uniforme coincide cu topologia produs (deci cu topologia convergenței punctuale).

A 37. Fie X s.l.t. și V o vecinătate mărginită a originii. Oricare ar fi șirul $\lambda_n \in \Gamma$, $\lambda_n \to 0$ și $\lambda_n \neq 0$, $\{\lambda_n V\}_{n \in \mathbf{N}}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Deci orice s.l.t. separat, care are o vecinătate mărginită a originii, este metrizabil.

A 38. Fie X s.l.t. și $A \subseteq X$ mulțime deschisă. Să se arate că A este conexă dacă și numai dacă este conexă prin linii frînte, adică: pentru fiecare x, $y \in A$ există $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel încît $[x, x_1]$, $[x_n, y]$, $[x_k x_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, n-1$, sînt incluse în A, unde $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

A 39. Fie X s.l.t. și $A \subseteq X$, A se numește *total mărginită* dacă, pentru fiecare vecinătate V a originii în X, există $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$.

a) Orice mulțime total mărginită este mărginită.

b) Dacă A este total mărginită, atunci $\bar{A}$ este total mărginită; $\forall \alpha \in \Gamma$, αA este total mărginită; dacă $B \subseteq A$, atunci B este total mărginită.

c) Dacă A, B sînt total mărginite, atunci $A \cup B$ și $A + B$ sînt total mărginite.

d) Dacă A este compactă, A este total mărginită.

e) Fie Y s.l.t. și $f : X \to Y$ liniară continuă. Dacă $A \subseteq X$ este total mărginită, atunci $f(A)$ este total mărginită.

A 40. Fie X s.l.t. separat. Dacă există în X o vecinătate total mărginită a originii (conform ex. 39), atunci X este de dimensiune algebrică finită.

A 41. Fie $\{X_i\}_{i \in I}$ s.l.t. și $A \subseteq \prod_{i \in I} X_i$. A este mărginită (respectiv total mărginită) dacă și numai dacă $\mathrm{pr}_i(A)$. este mărginită (respectiv total mărginită), $\forall i \in I$.

A 42. a) Fie X spațiu liniar, $H \subseteq X$ este hiperplan dacă și numai dacă există $f \in X^a \setminus \{0\}$ și $\alpha \in \Gamma$, astfel încît $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$.

b) Fie X s.l.t. $H \subseteq X$ este hiperplan închis dacă și numai dacă există $f \in X' \setminus \{0\}$ și $\alpha \in \Gamma$, astfel încît $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$.

A 43. Fie X spațiu liniar, $A \subseteq X$ și $p_A(x) = \inf. \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda A\}$.

a) $p_A : X \to [0, +\infty]$ și $p_A(\mu x) = \mu p_A(x)$, $\forall \mu \geqslant 0$.

b) Dacă A este absorbantă, atunci $p_A : X \to [0, +\infty)$.

c) Dacă A este absorbantă și convexă, atunci p_A este funcțională convexă.

d) Dacă X este s.l.t. iar A este vecinătate deschisă și convexă a originii, atunci $A = \{x \in X \mid p_A(x) < 1\}$. Dacă A este vecinătate convexă și închisă a originii, atunci $A = \{x \in X \mid p_A(x) \leqslant 1\}$.

B 44. Fie X s.l.t. real, $A \subseteq X$ mulțime convexă, deschisă și nevidă; M varietate liniară, astfel încît $A \cap M = \emptyset$. Să se arate că există un hiperplan închis H, astfel încît $M \subseteq H$ și $A \cap H = \emptyset$.

B 45. Fie X s.l.t. real, $A \subseteq X$ mulțime convexă cu interiorul nevid, $B \subseteq X$ mulțime convexă și nevidă, astfel încît $A \cap B = \emptyset$. Să se arate că există un hiperplan închis $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ astfel încît $f(a) \leqslant \alpha$, $\forall a \in A$ și $f(b) \geqslant \alpha$, $\forall b \in B$ (se spune că hiperplanul H separă A de B). Dacă, în plus, A și B sînt deschise, atunci există un hiperplan $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$, astfel, încît $f(a) < \alpha$, $\forall a \in A$ și $f(b) > \alpha$, $\forall b \in B$ (se spune că hiperplanul H separă strict A de B).

B 46. a) Fie X s.l.t. (respectiv separat), în care există o mulțime deschisă, mărginită și nevidă. Să se arate că se poate defini o aplicație $\rho : X \to \mathbf{R}_+$ cu proprietățile: 1) $\rho(0) = 0$ (respectiv $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$). 2) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$. 3) $\exists \mu > 0$ astfel încît $\rho(x + y) \leqslant \mu(\rho(x) + \rho(y))$. 4) Mulțimile $S(r) = \{x \in X \mid \rho(x) < r\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale originii.

b) Reciproc, fie X spațiu liniar și $\rho : X \to \mathbf{R}_+$ o aplicație cu proprietățile 1), 2) și 3) de mai sus. Să se arate că mulțimile definite la 4) formează un sistem fundamental de vecinătăți ale originii, într-o topologie compatibilă cu structura de spațiu liniar. În această topologie există o mulțime deschisă, mărginită și nevidă (un asemenea s.l.t. se numește local mărginit).

B 47. Fie $p \in (0, 1)$, $f \in L^p([0, 1])$ și $\rho(f) = \left[\int_0^1 | f(t) |^p \, dt\right]^{1/p}$.

a) Să se verifice că ρ satisface proprietățile 1) —3) de la exercițiul 46.

b) Dacă se consideră $L^p([0, 1])$ înzestrat cu topologia indicată la exercițiul 46, atunci singura funcțională $\varphi: L^p([0, 1]) \to \mathbf{R}$, liniară și continuă, este funcționala identic nulă.

c) Să se arate că, în acest caz, orice constantă μ care convine pentru inegalitatea de la ex. 46 a) 3) este > 1.

A 48. Fie X s.l.t. și $f \in X^a$. Să se arate că $f \in X'$ dacă și numai dacă există o mulțime deschisă și nevidă pe care f să fie majorată (în modul, dacă X este spațiu liniar complex).

B 49. Fie X s.l.t. Să se arate că $X' \neq \{0\}$ dacă și numai dacă există în X o mulțime convexă, deschisă, nevidă și diferită de X.

A 50. Dacă $p \in (0, 1)$ și $f, g \in L^p([0, 1])$ să se verifice inegalitățile:

$$\int_0^1 | f(t) + g(t) |^p \, dt \leqslant \int_0^1 | f(t) |^p \, dt + \int_0^1 | g(t) |^p \, dt \text{ și } \left(\int_0^1 | f(t) + g(t) |^p \, dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{1/p-1}\left(\left(\int_0^1 | f(t) |^p \, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 | g(t) |^p \, dt\right)^{1/p}.\right)$$

A 51. Fie X s.l.t. metrizabil și complet pentru o metrică invariantă la translații. Atunci X este complet față de orice metrică invariantă la translații, care induce aceeași topologie (un astfel de s.l.t. se numește spațiu Fréchet).

A 52. a) Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este aditivă, este $\mathbf{Q}$-liniară.

b) Să se construiască o aplicație aditivă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, discontinuă în topologia uzuală.

A 53. Fie X s.l.t., X_1, X_2 subspații liniare, astfel încît $X = X_1 \oplus X_2$. Se spune că suma este *topologică*, dacă aplicația $x \to x_1$ este continuă (unde $x = x_1 + x_2$ este scrierea unică, cu $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$). Atunci:

a) $x \to x_2$ este, de asemenea, o aplicație continuă.

b) Suma este topologică dacă și numai dacă aplicația canonică $X/X_1 \to X_2$ este homeomorfism.

A 54. Fie X_1, X_2 s.l.t. și să definim $\varepsilon_i : X_i \to X_1 \oplus X_2$ $(i = 1, 2)$, prin $\varepsilon_1(x_1) = (x_1, 0)$; $\varepsilon_2(x_2) = (0, x_2)$. Să se verifice că $X_1 \oplus X_2$ este suma directă topologică a subspațiilor $\varepsilon_1(X_1)$ și $\varepsilon_2(X_2)$.

A 55. a) Fie X s.l.t. real iar $u : X \to X$ un izomorfism algebric și homeomorfism, care satisface $u \circ u = -1_X$. Să se verifice că, dacă definim $(\lambda + i\mu) \cdot x = \lambda x + \mu u(x)$, X devine s.l.t. complex. Reciproc?

b) Dacă $X = \mathbf{R}^{2n+1}$, atunci nu există nici o aplicație u cu proprietățile indicate.

c) Dacă definim $u : X \times X \to X \times X$ prin $u(x, y) = (-y, x)$, atunci u satisface proprietățile indicate. Deci $X \times X$ poate fi organizat ca s.l.t. complex. Să se determine explicit $(\lambda + i\mu) \cdot (x, y)$. Ca rezultat se obține pentru $X = \mathbf{R}^n$?

A 56. Fie X s.l.t. complex. Notăm X_0 spațiul X, privit ca s.l.t. real. Orice funcțională liniară continuă pe X determină două funcționale reale continue, prin formula $f = g + ih$. Aplicația $\varphi : (X')_0 \to (X_0)'$, definită prin $\varphi(f) = g$, este un izomorfism algebric.

A 57. Fie X spațiu liniar, $A \subseteq X$ mulțime convexă, echilibrată și care conține o bază algebrică pentru X. Atunci A este absorbantă.

A 58. Fie $s = \{(\lambda_n) \mid \lambda_n \in \Gamma\}$ mulțimea șirurilor din Γ, organizată ca spațiu liniar, cu operațiile uzuale. Se notează:

$$d((\lambda_n), (\mu_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\lambda_n - \mu_n|}{1 + |\lambda_n - \mu_n|}.$$

a) Să se arate că d este o distanță pe s, invariantă la translații. Topologia indusă este compatibilă cu structura de spațiu liniar. s este spațiu metric complet și este izomorf (algebric și topologic) cu $\Gamma^{\mathbf{N}}$, înzestrat cu topologia produs.

b) O funcțională liniară $f : s \to \Gamma$ este continuă dacă și numai dacă există $n_0 \in \mathbf{N}$ și $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0}$ astfel încît $f((\lambda_n)) = \sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n \lambda_n$, $\forall (\lambda_n) \in s$.

A 59. Să se demonstreze direct exercițiul 44, în cazul particular: $X = \mathbf{R}^2$, $M = \{(1, 0)\}$ și $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$; respectiv: $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 1\}$. Să se precizeze în fiecare caz toate hiperplanele care satisfac.

A 60. Un s.l.t. este separat Hausdorff (T_2) dacă și numai dacă este $\overline{T_0}$.

A 61. Fie X, Y s.l.t. metrizabile. Oricare ar fi d, d' distanțe pe X, respectiv Y, invariante la translații și compatibile cu topologiile respective, orice aplicație liniară și continuă $T : X \to Y$ este uniform continuă.

IV. SPAȚII LOCAL CONVEXE

Pentru prescurtare, vom scrie s.l.c. pentru spațiu local convex.

A 1. Fie $x = (x_n) \in s$ și $p_n(x) = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Să se verifice că fiecare p_n, $n \in \mathbf{N}$, este o seminormă, iar $\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este o familie filtrantă și suficientă de seminorme pe s. Să se compare topologia indusă de această familie cu topologia introdusă în ex. III. 58. Să se arate că $x^k = (x_n^k) \in s$ converge la 0 dacă și numai dacă $\lim_{k \to \infty} x_n^k = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

A 2. Să se verifice că $\mathcal{C}([0, 1])$, înzestrat cu topologia convergenței punctuale, este s.l.c. separat.

A 3. Fie X un spațiu liniar și $\mathcal{U}$ o mulțime de părți ale lui X, cu proprietățile: (*i*) $V_1, V_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\, V_3 \in \mathcal{U}$ cu $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$; (*ii*) $V \in \mathcal{U}$, $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda V \in \mathcal{U}$; (*iii*) $V \in \mathcal{U} \Rightarrow V$ este mulțime convexă, echilibrată și absorbantă. Să se arate că există pe X o singură topologie, care să fie compatibilă cu structura de spațiu liniar, și în care $\mathcal{U}$ să fie sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Această topologie este local convexă.

A 4. Fie X spațiu liniar și τ_s topologia local convexă dată de familia tuturor seminormelor pe X.

a) Mulțimea tuturor părților convexe, echilibrate și absorbante din X este sistem fundamental de vecinătăți ale originii în topologia τ_s.

b) τ_s este mai fină decît orice topologie local convexă pe X.

c) Oricare ar fi Y spațiu local convex și $f : X \to Y$ liniară, f este continuă cînd X are topologia τ_s.

d) Topologia uzuală pe $\mathbf{R}^n$ coincide cu τ_s.

A 5. Fie X spațiu topologic separat. Pentru fiecare parte finită $F \subseteq X$ definim *seminorma* p_F pe $\mathcal{C}(X)$ prin: $p_F(f) = \max_{x \in F} |f(x)|$. La ce revine convergența unui șir din $\mathcal{C}(X)$, în topologia dată de familia de seminorme $\{p_F\}$, cînd F parcurge mulțimea părților finite ale lui X? Familia de seminorme considerată este dirijată? dar suficientă?

A 6. Fie $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ deschis și să notăm $\mathcal{H}(\Omega)$ spațiul liniar al funcțiilor olomorfe pe Ω.

a) $\mathcal{H}(\Omega)$ este subspațiu închis în $\mathcal{C}(\Omega)$, în topologia de la exercițiul 7.

b) Orice parte mărginită din $\mathcal{H}(\Omega)$ este relativ compactă (un spațiu Fréchet în care orice parte mărginită este relativ compactă se numește spațiu Montel).

A 7. Fie $X \subseteq \mathbf{R}^n$ deschis.

a) Familia de seminorme $\{p_K\}$, unde $K \subseteq X$ parcurge mulțimea părților compacte (conform ex. II. 5), definește o topologie local convexă, metrizabilă pe $\mathcal{C}(X)$, față de care $\mathcal{C}(X)$ este complet. Deci $\mathcal{C}(X)$ este spațiu Fréchet (conform ex. III. 51).

b) Orice vecinătate a originii în această topologie este nemărginită.

B 8. Fie X spațiu liniar, $\{X_i\}_{i \in I}$ o familie filtrantă crescător de subspații liniare ale lui X, fiecare înzestrat cu o topologie local convexă τ_i, astfel încît: (a) $X = \bigcup_{i \in I} X_i$; (b) dacă $X_i \subseteq X_j$ atunci incluziunea canonică $X_i \to X_j$ este continuă. Se notează $\mathcal{U}$ mulțimea acelor părți $A \subseteq X$, care sînt convexe, echilibrate, iar $A \cap X_i$ este vecinătate a originii în topologia τ_i, $\forall i \in I$. Să se verifice că $\mathcal{U}$ este sistem fundamental de vecinătăți ale originii pentru o topologie local convexă pe X (numită topologia limită inductivă a topologiilor τ_i). Dacă Y este s.l.c. iar $f : X \to Y$ este o aplicație liniară cu proprietatea că $f|_{X_i}$ este continuă, $\forall i \in I$, atunci f este continuă. Reciproc, să se arate că topologia limită inductivă pe X poate fi caracterizată ca cea mai puțin fină topologie pe X, pentru care toate aplicațiile $X_i \to X$ sînt continue și în care orice aplicație liniară $f : X \to Y$ (Y s.l.c.) este continuă de îndată ce $f|_{X_i}$ sînt continue, $\forall i \in I$.

B 9. Fie $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ deschis și să notăm $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mulțimea funcțiilor $f : \Omega \to \mathbf{R}$, care admit derivate parțiale de orice ordin pe Ω și au suport compact. Pentru fiecare compact $K \subseteq \Omega$ să notăm $\mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega) = \{f \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \subseteq K\}$. Pentru fiecare compact $K' \subseteq K$, $m \in \mathbf{N}$ și $f \in \mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$ notăm $p_{K',m}(f) = \sup_{\substack{x \in K' \\ |k| \leqslant m}} |D^k f(x)|$.

a) Să se verifice că $p_{K',m}$ este o seminormă pe $\mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$. Familia de subspații liniare $\{\mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)\}$ ale lui $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ satisface condițiile de la ex. 8. Se notează $\mathcal{D}(\Omega)$ spațiul $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ înzestrat cu topologia limită inductivă.

b) Să se arate că un șir $\{f_n\}$ din $\mathcal{D}(\Omega)$ este convergent la 0 dacă și numai dacă: (*i*) Există $K \subseteq \Omega$ compact, astfel încît $\operatorname{supp} f_n \subseteq K$, $\forall n \in \mathbf{N}$. (*ii*) Pentru fiecare $k = (k_1, \ldots, k_n)$ avem $\mathcal{D}^k f_n \to 0$, uniform pe K.

B 10. Se numește distribuție pe Ω orice funcțională liniară și continuă $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$.

a) Să se arate că o aplicație liniară $f : \mathscr{D}_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R}$ este distribuție dacă și numai dacă, pentru fiecare compact $K \subseteq \Omega$, există $C \geqslant 0$ și $n \in \mathbf{N}$ astfel încît:

$$|f(\varphi)| \leqslant C \sum_{|k| \leqslant n} \sup_{x \in K} |D^k \varphi(x)|,$$

oricare ar fi $\varphi \in \mathscr{D}_0^\infty(\Omega)$.

b) Fie $x \in \Omega$ și $\delta_x : \mathscr{D}_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R}$, definită prin $\delta_x(f) = f(x)$, $\forall f \in \mathscr{D}_0^\infty(\Omega)$. Să se verifice că δ_x este o distribuție pe Ω (numită distribuția Dirac).

c) Fie $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ și să definim $T_f : \mathscr{D}_0^\infty(\Omega) \to \mathbf{R}$ prin: $T_f(\varphi) = \int_\Omega f(t)\, \varphi(t)\, dt$. Să se arate că T_f este o distribuție pe Ω (numită distribuție de tip funcție). Dacă $f_1, f_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ și $T_{f_1} = T_{f_2}$, atunci $f_1 = f_2$. Distribuția Dirac nu este o distribuție de tip funcție.

d) Pentru fiecare $\varphi \in \mathscr{D}_0^\infty(\Omega)$ să notăm: $vp\left(\frac{1}{t}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$. Să se arate că $vp\left(\frac{1}{t}\right)$ este o distribuție pe $\mathbf{R}$.

e) Fie f o distribuție pe Ω și $\psi \in \mathscr{D}_0^\infty(\Omega)$. Dacă notăm $(\psi f)(\varphi) = f(\psi\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}_0^\infty(\Omega)$, să se verifice că ψf este o distribuție pe Ω.

B 11. a) Dacă $\Omega \subseteq \mathbf{R}$ este deschis și f este o distribuție pe Ω, notăm $f'(\varphi) = -f(\varphi')$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}_0^\infty(\Omega)$. Să se arate că f' este o distribuție pe Ω.

b) Dacă f este o funcție cu derivată continuă pe Ω atunci $T_{f'} = (T_f)'$.

c) Fie $f(t) = 0$ dacă $t < 0$ și $f(t) = 1$ dacă $t \geqslant 0$. Să se verifice că $T_f(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)\, dt$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}_0^\infty(\mathbf{R})$ este o distribuție pe $\mathbf{R}$, iar $(T_f)' = \delta_0$ (T_f se numește distribuția Heaviside).

d) Să se arate că, pentru fiecare $\psi \in \mathscr{D}_0^\infty(\mathbf{R})$ avem $(\psi f)' = \psi' f + \psi f'$, unde f este o distribuție oarecare pe $\mathbf{R}$.

B 12. Să notăm h distribuția pe $\mathbf{R}$, asociată funcției constante 1, deci $h(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\, dt$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}_0^\infty(\mathbf{R})$. Să se arate că $tf = h$ dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît $f = vp\left(\frac{1}{t}\right) + \alpha\delta_0$.

B 13. Fie f o distribuție pe $\mathbf{R}$. Să se arate că există $u \in L^\infty([0, 1])$ și $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $f = \frac{d^n}{dt^n}(T_u)$.

B 14. Fie X s.l.t. oarecare. Numim *tonou* orice parte a lui X, care este convexă, echilibrată, absorbantă și închisă. Să se arate că în fiecare s.l.c. există un sistem fundamental de vecinătăți ale originii, format din tonouri.

a) Un s.l.t., în care orice tonou este vecinătate a originii, se numește *tonelat*. Dacă X este s.l.c. de categoria a II-a, atunci este tonelat.

b) Un s.l.c. X este tonelat dacă și numai dacă topologia sa coincide cu topologia definită de mulțimea tuturor seminormelor inferior semicontinue pe X.

c) Dacă în exercițiul 8 toate subspațiile X_t sînt tonelate, atunci X este tonelat.

B 15. Fie X s.l.c. Să se arate că mulțimile convexe, echilibrate și care absorb orice mulțime mărginită din X, formează un sistem fundamental de vecinătăți ale originii într-o topologie local convexă τ_B. Să se arate că τ_B este mai fină decît τ; mulțimile τ-mărginite coincid cu mulțimile τ_B-mărginite.

b) Un s.l.c. X se numește bornologic dacă $\tau = \tau_B$. Să se arate că orice s.l.c. metrizabil este bornologic.

c) Dacă în ex. 8 toate subspațiile X_t sînt bornologice, atunci X este bornologic.

B 16. Fie (X, τ) s.l.c. iar Y s.l.c. bornologic. O aplicație liniară $f: Y \to X$ este continuă (cînd X are topologia τ) dacă și numai dacă este continuă cînd X are topologia τ_B.

a) Fie X s.l.c. bornologic, Y s.l.c. și $f: X \to Y$ liniară. Următoarele afirmații sînt echivalente: $\alpha)$ f este continuă. $\beta)$ $x_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to 0$. $\gamma)$ $A \subseteq X$ mărginită $\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ mărginită.

b) Fie X s.l.c. cu proprietatea că, pentru orice Y s.l.c. și orice aplicație liniară $f: X \to Y$ care are proprietatea $\gamma)$, este continuă. Atunci X este bornologic.

A 17. Fie $X \subseteq \mathcal{C}([0, 1])$ subspațiul format din acele funcții $f \in \mathcal{C}([0,1])$ astfel încît există $\alpha \in (0, 1]$ (depinzînd de f) încît $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, \alpha]$. Notînd $D = \{f \in X \mid n|f(n^{-1})| \leqslant 1, \forall n \in \mathbf{N}\}$, să se arate că D este tonou în X (înzestrat cu topologia convergenței uniforme), dar nu este vecinătate a originii. Deci X este bornologic, dar nu este tonelat.

A 18. Într-un s.l.c., înfășurătoarea convexă a unei mulțimi mărginite este mărginită.

A 19. Fie X s.l.c., a cărui topologie este dată de familia de seminorme $\{p_i\}_{i \in I}$. Să se arate că $A \subseteq X$ este mărginită dacă și numai dacă $\forall i \in I$, $\exists \lambda_i \geqslant 0$ astfel încît $p_i(x) \leqslant \lambda_i$, $\forall x \in A$.

A 20. Într-un s.l.c., orice varietate liniară proprie și închisă este intersecția tuturor hiperplanelor care o conțin.

B 21. Fie X s.l.c. separat iar $B \subseteq X$ o mulțime convexă, echilibrată, mărginită și închisă.

a) Notînd $X_B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} nB$, X_B este subspațiu liniar, iar restricția funcționalei Minkowski p_B la X_B este o normă.

b) Să se arate că familia $\{X_B\}$ satisface ipotezele de la ex. 8; limita sa inductivă este (X, τ_B) (conform. ex. 15).

A 22. Fie X s.l.c. metrizabil, iar $B_n \subseteq X$ un șir de mulțimi mărginite. Să se arate că există $\mu_n > 0$ astfel încît $B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mu_n B_n$ să fie mărginită.

A 23. Fie X s.l.c. real separat. Dacă K_1, K_2 sînt mulțimi convexe, nevide, închise, din care cel puțin una compactă, iar $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, atunci există un hiperplan închis care separă tare K_1 de K_2 (adică există $f \in X'$, $\alpha \in \mathbf{R}$ și $\varepsilon > 0$ astfel încît $f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon$, $\forall x \in K_1$ și $f(x) \geqslant \alpha + \varepsilon$, $\forall x \in K_2$).

A 24. Fie X s.l.c. separat, real. Orice mulțime convexă, închisă și diferită de X este intersecția semispațiilor care o conțin.

A 25. Fie X spațiu liniar real, A și B mulțimi convexe, nevide și disjuncte din X. Dacă există $x \in A$ astfel încît $A - x$ să fie absorbantă, atunci există un hiperplan care separă A de B. Ce legătură are cu exercițiul III. 45?

A **26.** Să se arate că topologia considerată la exercițiul III. 46 nu este local convexă.

A 27. Fie T o mulțime, X s.l.c. Atunci X^T este s.l.c., pentru orice σ-topologie (conform ex. III. 36). Dacă topologia lui X este dată de familia de seminorme $(p_i)_{i \in I}$, atunci σ-topologia pe X^T este dată de familia de seminorme $(p_{S,i})_{S \in \sigma, i \in I}$, unde: $p_{S,i}(f) = \sup_{x \in S} p_i(f(x))$.

B 28. Fie X s.l.c. separat iar $\emptyset \neq K \subseteq X$ o parte convexă și compactă. $\emptyset \neq A \subseteq K$ se numește *extremală* pentru K dacă $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$, $\lambda \in (0, 1)$ și $x, y \in K$ implică $x, y \in A$.

a) Ce înseamnă că $\{x\}$ este mulțime extremală?

b) Utilizînd lema lui Zorn, să se arate că există în K cel puțin un punct extremal.

c) Raționînd prin reducere la absurd și folosind ex. III. 45, să se arate că mulțimea K este înfășurătoarea convexă a mulțimii punctelor sale extremale (teorema lui Krein-Milman).

B 29. Fie X s.l.c. separat, real și $K \subseteq X$ o mulțime compactă. Dacă mulțimea $\overline{\text{co}}\ K$ este compactă, atunci punctele sale extremale sînt în K.

A 30. Să se dea un exemplu (în $\mathbf{R}^3$) de mulțime convexă și compactă, pentru care mulțimea punctelor extremale nu este închisă.

+31. Mulțimea punctelor extremale ale unei mulțimi compacte și convexe din $\mathbf{R}^2$ este închisă.

A 32. Să se verifice că următoarele mulțimi din $\mathbf{R}^2$:

a) Cercul de centru $(0, 0)$ și raza $r > 0$.

b) Pătratul de vîrfuri: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

c) Pătratul de vîrfuri: $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ sînt mulțimi convexe, echilibrate și absorbante. Să se scrie funcționalele Minkowski atașate acestor mulțimi.

A 33. Fie X s.l.c., a cărui topologie este dată de familia dirijată $\mathcal{P}$ de seminorme.

a) Fie q o seminormă pe X. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente: (*i*) q este continuă; (*ii*) q este continuă în 0; (*iii*) $\{x \in X \mid q(x) < 1\}$ este vecinătate a originii. (*iv*) $\exists\ C$ și $p \in \mathcal{P}$ astfel încît $q(x) \leqslant Cp(x)$, $\forall x \in X$.

b) Orice $p \in \mathcal{P}$ este continuă. c) Dacă q este o seminormă continuă pe X, atunci $\mathcal{P} \cup \{q\}$ induce aceeași topologie pe X ca și $\mathcal{P}$.

A 34. Fie X s.l.c. și să notăm $\mathcal{P}$ familia tuturor seminormelor continue pe X.

a) $\mathcal{P}$ este o familie dirijată.

b) $\mathcal{P}$ induce topologia lui X.

c) Dacă Q este o familie de seminorme pe X, care induce topologia lui X, atunci $Q \subseteq \mathcal{P}$.

d) Fie Y s.l.c., a cărui topologie este dată de familia Q de seminorme. Fie $T : X \to Y$ o aplicație liniară. T este continuă dacă și numai dacă $\forall\ q \in Q$, $\exists p \in \mathcal{P}$ astfel încît $p(Tx) \leqslant q(x)$, $\forall x \in X$.

A 35. Pentru fiecare $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ se notează: $p_1(f) = \sup_{x \in [0, 1/2]} |f(x)|$, $p_2(f) = \sup_{x \in [1/2, 1]} |f(x)|$.

a) Să se verifice că p_1 și p_2 sînt seminorme, dar nu sînt norme.

b) Familia $\{p_1, p_2\}$ este suficientă, dar nu este dirijată.

c) Topologia local convexă dată de familia $\{p_1, p_2\}$ coincide cu topologia uzuală, dată de norma $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

d) Să se definească o seminormă p_3 pe $\mathcal{C}([0, 1])$ astfel încît $\{p_1, p_2, p_3\}$ să fie o familie dirijată de seminorme, care induce topologia uzuală. Să se arate că, oricum ar fi ales p_3, p_3 este o normă, echivalentă cu norma uzuală.

A 36. Fie X s.l.c. real, separat; $S \subseteq X$ o parte oarecare, $A \subseteq X$ o mulțime nevidă și închisă. Să se arate că $S \subseteq A$ dacă și numai dacă $f(S) \subseteq f(A)$, $\forall f \in X'$.

A 37. Fie X s.l.c., $X_0 \subseteq X$ subspațiu liniar, $f : X_0 \to \Gamma$ funcțională liniară și continuă. Să se arate că există $F : X \to \Gamma$ funcțională liniară și continuă, astfel încît $F|_{X_0} = f$. Afirmația nu mai este adevărată dacă X este presupus doar s.l.t.

A 38. Fie X s.l.c. real. Să se arate că există mulțimi convexe, disjuncte, care nu pot fi separate printr-un hiperplan închis, dacă X este de dimensiune algebrică infinită.

A 39. Pentru fiecare mulțime mărginită $A \subseteq X$ dintr-un s.l.c., definim: $p_A(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$, unde $f \in X'$.

a) Să se verifice că $\{p_A\}$ este o familie suficientă de seminorme pe X' (topologia definită de această familie se numește topologia tare).

b) Să se arate că, pentru fiecare $x \in X$, aplicația $\tilde{x} : X' \to \Gamma$, definită prin $\tilde{x}(f) = f(x)$, este liniară și continuă în topologia tare.

c) Să se arate că topologia tare coincide cu σ-topologia, cînd σ este mulțimea părților mărginite din X.

A 40. Fie X s.l.c. și $A \subseteq X$ o mulțime total mărginită. Atunci co A este total mărginită.

A 41. a) Fie T o distribuție pe $\mathbf{R}$. Pentru fiecare $a \in \mathbf{R}$, definim T_a prin: $T_a\varphi = T\varphi_a$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, unde $\varphi_a(t) = \varphi(t - a)$. Să se verifice că T_a este o distribuție pe $\mathbf{R}$.

b) Să se verifice că: $\lim_{h \to 0} h^{-1} (T_a - T)(\varphi) = T'(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$.

A 42. Pentru fiecare $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ notăm $p_n(f) = \sup_{t \in [-n, n]} |f(t)|$.

a) Să se arate că $\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este o familie crescătoare și suficientă de seminorme pe $\mathcal{C}(\mathbf{R})$, care definește o topologie metrizabilă pe $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

b) $f_k \to f$ în topologia de la pct. a) dacă și numai dacă $f_k \to f$ uniform pe fiecare compact din $\mathbf{R}$.

A 43. Pentru fiecare $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ și $a \in \mathbf{R}$ definim: $(T_a f)(t) = f(t + a)$. Să se arate că $T_a : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}(\mathbf{R})$ este o aplicație liniară și continuă în topologia definită la ex. 42.

V. SPAȚII NORMATE

A 1. Pe $\mathbf{R}^2$ se consideră următoarele trei norme: $\| x \| = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}$; $\| x \|_1 = |x_1| + |x_2|$; $\| x \|_2 = \max. \{|x_1|, |x_2|\}$. Să se reprezinte grafic mulțimile: $S(0, 1)$, $S_1(0, 1)$ și $S_2(0, 1)$. Să se determine geometric cele mai mari (respectiv cele mai mici) constante a, c (respectiv b, d) astfel încît $a \| x \|_1 \leqslant \| x \| \leqslant b \| x \|_1$; $c \| x \|_2 \leqslant \| x \| \leqslant d \| x \|_2$, pentru orice $x = (x_1, x_2)$.

A 2. Fie $\mathcal{C}^1([0, 1])$ spațiul liniar al funcțiilor definite, cu derivată continuă pe $[0, 1]$, pe care se consideră normele:

$$\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt; \quad \| f \| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|; \quad \| f \|' = |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

a) Să se verifice că $\| \cdot \|'$ este normă pe $\mathcal{C}^1([0, 1])$.

b) Orice șir convergent în norma $\| \cdot \|$ este convergent și în norma $\| \cdot \|_1$; orice șir convergent în norma $\| \cdot \|'$ este convergent și în norma $\| \cdot \|$.

c) Să se studieze convergența șirurilor $f_n(t) = t^n$ și $g_n(t) = n^{-1} \cdot \sin nt$. Ce se poate afirma despre cele trei norme?

B 3. Fie X spațiu topologic compact, $\mathcal{C}(X)$ spațiul liniar al funcțiilor reale, continue pe X. Se consideră pe $\mathcal{C}(X)$ norma $\| f \| = \sup_{t \in X} |f(t)|$, față de care $\mathcal{C}(X)$ este o algebră Banach.

a) Pentru $A \subseteq X$ notăm $\alpha(A) = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid A \subseteq f^{-1}(\{0\})\}$. Să se arate că $\alpha(A)$ este un ideal închis în $\mathcal{C}(X)$ și $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$, iar $A \subseteq B$ implică $\alpha(B) \subseteq \alpha(A)$.

b) Dacă $\mathcal{J}$ este ideal propriu în $\mathcal{C}(X)$, notăm $\beta(\mathcal{J}) = \bigcap_{f \in \mathcal{J}} f^{-1}(\{0\})$. Să se arate că $\beta(\mathcal{J})$ este o mulțime închisă, nevidă în X. Dacă $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2$ sînt ideale proprii, atunci $\beta(\mathcal{J}_2) \subseteq \beta(\mathcal{J}_1)$.

c) Să se demonstreze relațiile $\alpha(\beta(\mathcal{J})) = \overline{\mathcal{J}}$ și $\beta(\alpha(A)) = \bar{A}$.

d) Să se demonstreze că orice ideal maximal în $\mathcal{C}(X)$ este închis. Utilizînd acest fapt, să se arate că $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}(X)$ este ideal maximal dacă și numai dacă există $x \in X$ încît $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$.

A 4. Fie X spațiul topologic compact, $\varphi: \mathcal{C}(X) \to \mathbf{R}$ un omomorfism nenul de algebre. Utilizînd exercițiul 3, să se arate că există $x_0 \in X$ unic, astfel încît $\varphi(f) = f(x_0)$, pentru orice $f \in \mathcal{C}(X)$. Să se deducă de aici continuitatea lui φ.

A 5. Fie X spațiu normat. Să se arate că $A \subseteq X$ este mărginită (conform ex. III. 31) dacă și numai dacă există M astfel încît $\| x \| \leqslant M \ \forall x \in A$.

A 6. Fie X spațiu normat și $Y \subseteq X$ subspațiu liniar închis. Topologia spațiului cît X/Y este dată de o normă *(indicație:* se poate alege: $\| x_0 + Y \| = \inf. \{\| x \| \mid x - x_0 \in Y\}$).

A 7. a) Fie X spațiu normat și $S(x, r) = \{y \mid \| x - y \| < r\}$; $S'(x, r) = \{y \mid \| x - y \| \leqslant r\}$, $r > 0$. Să se verifice că $\overline{S(x, r)} = S'(x, r)$; $\overset{\circ}{S'}(x, r) = S(x, r)$ și $\partial S(x, r) = \partial S'(x, r) = \{y \mid \| x - y \| = r\}$.

b) Să se arate că $S(x, r)$ este homeomorf cu X, pentru fiecare $x \in X$ și $r > 0$.

A 8. Fie X spațiu normat și $x,\ y \in X \setminus \{0\}$. Să se demonstreze inegalitățile: $\| x - y \| \geqslant 1/2 \sup \{\| x \|, \| y \|\} \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\|$; $\| x - y \| \geqslant 1/4\ (\| x \| + \| y \|) \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\|$. Să se arate că, în prima inegalitate, factorul $1/2$ nu poate fi înlocuit cu un număr mai mare.

A 9. Notăm $C = \{(x_n) \in l^1 \mid x_n \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbf{N}\}$. Să se arate că, pentru fiecare $x \in l^1$, există $u,\ v \in C$ astfel încît $x = u - v$, dar $\overset{\circ}{C} = \emptyset$.

B 10. Fie $q \geqslant 1$ și $x = (x_n) \in l^q$. Dacă $p \geqslant q$, atunci $x \in l^p$, $x \in m$ și $\lim\limits_{p \to \infty} \| x \|_p = \| x \|$, ultima normă fiind în m.

A 11. Fie $A \subseteq \mathcal{C}([0, 1])$ cu proprietățile: 1) $\forall f \in A$, f este derivabilă. 2) $\sup\limits_{f \in A} |f(0)| < +\infty$. 3) $\sup\limits_{\substack{f \in A \\ x \in [0,1]}} |f'(x)| < +\infty$. Atunci A este o parte relativ compactă în $\mathcal{C}([0, 1])$.

A 12. În spațiul liniar $\mathcal{C}([0, 1])$, înzestrat cu norma $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$, se consideră șirul: $f_n(t) = 0$ dacă $t \in (0,\ 1/2 - n^{-1})$; $f_n(t) = 1$ dacă $t \in [1/2 + n^{-1},\ 1]$ și $f_n(t) = 1/2\, nt + 1/2 - n/4$ dacă $t \in (1/2 - n^{-1},\ 1/2 + n^{-1})$ (pentru $n \geqslant 3$). Să se arate că $\{f_n\}$ este șir Cauchy, dar nu are limită.

A 13. Fie $\varphi_t : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbf{R}$ aplicația $\varphi_t(f) = f(t)$. Să se arate că φ_t este o funcțională liniară: a) continuă, dacă pe $\mathcal{C}([0, 1])$ se consideră topologia convergenței punctuale (conform ex. III. 36); b) discontinuă, dacă pe $\mathcal{C}([0, 1])$ se consideră norma din exercițiul 12.

B 14. Fie X s.l.t. separat și $A \subseteq X$ o mulțime deschisă, echilibrată, convexă și mărginită. Să se arate că funcționala Minkowski atașată lui A este o normă, care induce topologia lui X. Să se deducă următorul rezultat *(teorema de normabilitate a lui Kolmogorov)*: topologia unui s.l.t. separat este dată de o normă dacă și numai dacă există o parte nevidă, deschisă, convexă și mărginită în X.

A 15. Fie X s.l.t. separat și local mărginit (conform ex. III. 46). Atunci X este local convex dacă și numai dacă este normabil.

A 16 Fie $\{X_i\}_{i \in I}$ o familie de spații normate $\neq \{0\}$. $\prod\limits_{i \in I} X_i$ este normabil (cu topologia produs) dacă și numai dacă mulțimea I este finită.

A 17. Să se arate că $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (cu topologia produs) este s.l.t. metrizabil, în care nici o vecinătate a originii nu este mărginită. Deci $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ este un spațiu Fréchet, care nu este normabil.

A 18. Fie $x = (x_n) \in c_0$. Să se verifice că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ este comutativ convergentă la x în c_0; dar este absolut convergentă dacă și numai dacă $x \in l^1$. În particular, $\{e_n\}$ este bază Schauder în c_0.

A 19. Fie X spațiu normat. Aplicînd teorema lui Hahn-Banach aplicației $f_{y_0} : \Gamma y_0 \to \Gamma$ definite prin $f_{y_0}(\alpha\ y_0) = \alpha\ \| y_0 \|^2$, să se arate că există o aplicație notată [...]: $X \times X \to \Gamma$ (numită semiprodus scalar), care verifică proprietățile:

α) $[\lambda_1 x + \lambda_2 y,\ z] = \lambda_1\ [x,\ z] + \lambda_2\ [y,\ z]$.

β) $[x,\ x] > 0,\ \forall x \in X \setminus \{0\}$.

γ) $|[x,\ y]| \leqslant \| x \|\, \| y \|$.

δ) $[x,\ x] = \| x \|^2$.

A 20. Să definim $f : c_0 \to \Gamma$ prin: $f((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} x_n$.

a) Să se arate că $f \in c_0^*$ și $\|f\| = 2$.

b) Nici un punct $x \in c_0$, cu $f(x) \neq 0$, nu admite proiecție pe subspațiul liniar închis Ker f (se poate utiliza ex. 24).

A 21. Fie spațiul liniar $\mathcal{C}([0, 1])$, înzestrat cu norma $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \int_0^1 |f(t)| \, dt$. Notăm $A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(0) = 0\}$ și $f_0(t) = 1, \ \forall t \in [0, 1]$.

a) Mulțimea A este convexă și închisă (chiar subspațiul maximal). b) $d(f_0, A) = 1$, dar pentru fiecare $f \in A$ avem $\|f - f_0\| > 1$. Deci în A nu există nici un element de cea mai bună aproximare pentru f_0.

A 22. Se notează: $M_i = \{f \in L^i([0,1]) \mid \int_0^1 f(t) \, dt = 1\}, \ i = 1, 2$.

a) Să se arate că M_1 și M_2 sînt mulțimi convexe și închise (chiar hiperplane).

b) Există un element unic $f_0 \in M_2$ astfel încît: $\|f_0\|_2 = \inf_{f \in M_2} \|f\|_2$. Să se afle acest element.

c) Există o infinitate de elemente $g \in M_1$ astfel încît $\|g\|_1 = \inf_{f \in M_1} \|f\|_1$.

B 23. Utilizînd exercițiul II. 10, să se arate că există cel puțin o aplicație liniară LIM: $m \to \mathbf{R}$, cu proprietățile:

a) $s \geqslant 0 \Rightarrow \text{LIM } s \geqslant 0$;

b) $s \in c \Rightarrow \text{LIM } s = \lim_{n \to \infty} s_n$;

c) Dacă $s' = (x_2, x_3, \ldots)$ atunci LIM $s =$ LIM s';

d) $\liminf_{n \to \infty} s_n \leqslant \text{LIM } s \leqslant \limsup_{n \to \infty} s_n$.

A 24. Fie X un spațiu normat, $f \in X^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ iar H hiperplanul închis $\{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$. Să se verifice că $d(x, H) = \|f\|^{-1} |f(x) - \alpha|$.

A 25. Un spațiu Banach X se numește *uniform convex* dacă: pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $\|x\| = \|y\| = 1$ și $\|x - y\| > \varepsilon$ implică $1/2 \ \|x + y\| < 1 - \delta(\varepsilon)$.

a) Dacă X este uniform convex iar $\{x_n\}$ este un șir din X cu proprietățile: $\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 1$ și $\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \|x_n + x_m\| = 2$ atunci $\{x_n\}$ este convergent.

b) Dacă X este uniform convex, iar $C \subseteq X$ este o parte convexă și închisă atunci există în C un element unic de normă minimă.

c) Dacă X este uniform convex, iar $f \in X^* \setminus \{0\}$ atunci există $x_0 \in X$ unic, astfel încît $\|x_0\| = 1$ și $f(x_0) = \|f\|$.

+ **26.** a) Dacă $x \in [0, 1]$ și $p \geqslant 2$ atunci: $(1/2 \ (1 + x))^p + (1/2 \ (1 - x))^p \leqslant 1/2 \ (1 + x^p)$.

b) Dacă $x \in [0, 1]$ și $1 < p \leqslant 2$ atunci: $(1 + x)^q + (1 - x)^q \leqslant 2 \ (1 + x^q)^{1/p - 2}$, unde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

c) Utilizînd inegalitățile precedente, să se arate că, pentru $f, g \in \mathcal{L}^p([a, b])$, avem:

$\| 1/2(f + g) \|_p^p + \| 1/2(f - g) \|_p^p \leqslant 1/2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$ dacă $p \geqslant 2$ și:

$\| 1/2(f + g) \|_p^q + \| 1/2(f - g) \|_p^q \leqslant 1/2(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{1/p - 1}$ dacă $1 < p \leqslant 2$ și $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

d) Să se scrie inegalitățile analoage în cazul spațiilor $l^p (p \in (1, +\infty))$.

e) Utilizînd c) și d) să se arate că, pentru $p \in (1, +\infty)$, spațiile $L^p([a, b])$ și l^p sînt uniform convexe *(teorema lui Clarkson)*.

A 27. Să se arate că spațiile c, c_0, $l^p (p \geqslant 1)$ și bv sînt separabile iar spațiul m nu este separabil. Deci există spații separabile al căror dual nu este separabil.

A 28. Se notează BV spațiul liniar al funcțiilor cu variație mărginită pe $[0, 1]$. Pentru fiecare $f \in BV$ se notează: $\| f \| = | f(0) | + \overset{1}{\underset{0}{\vee}} (f)$. Să se verifice că în acest fel s-a definit o normă pe BV, pentru care spațiul considerat este complet. BV nu este separabil.

A 29. Să se arate că spațiul $\mathcal{C}([0, 1])$ este separabil.

A 30. Folosind teorema lui Hahn-Banach și exercițiul 26, să se arate că dacă $f_n \in L^p([0, 1])$ converge slab la f iar $\| f_n \| \to \| f \|$, atunci $\{f_n\}$ converge tare la f $(1 < p < +\infty)$.

A 31. Fie X un spațiu Banach cu bază Schauder $\{x_n\}$. Fie $x \in X$ și $\alpha_k \in \Gamma$ astfel încît $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Dacă notăm $f_n(x) = \alpha_n$, atunci $\{f_n\}$ este o familie mărginită de funcționale liniare, iar seria de operatori $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\circ)\, x_n$ converge uniform pe compacte la aplicația identică.

+ 32. Există un spațiu Banach separabil, care nu admite bază Schauder.

A 33. Fie E spațiul liniar al polinoamelor cu coeficienți reali.

a) Dacă $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ și notăm $p(P) = |a_0| + \ldots + |a_n|$ atunci p este o normă pe E și $p(P_1 P_2) \leqslant p(P_1)\, p(P_2)$.

b) Dacă P' este polinomul derivat al lui P, să se verifice că $P \to P'$ este o aplicație liniară, care nu este continuă față de norma p.

c) Fie $p_1(P) = \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$. Să se arate că p_1 este o normă, iar p și p_1 nu sînt echivalente.

A 34. a) Fie X un spațiu normat și $\{x_n\}$ un șir din X, convergent la 0. Există atunci $\mu_n \in \Gamma$ astfel încît $|\mu_n| \to \infty$ și $\mu_n x_n \to 0$.

b) Fie X, Y spații normate și $f : X \to Y$ liniară. Să se arate că f este continuă dacă și numai dacă, oricare ar fi șirul $\{x_n\}$ convergent la 0 în X, mulțimea $\{\| f(x_n) \| \mid n \in \mathbf{N}\}$ este mărginită.

A 35. Fie $X \neq \{0\}$ un spațiu normat. Să se arate că nu există două aplicații liniare și continue f, $g \in L(X)$ astfel încît $f \circ g - g \circ f = 1_X$.

A 36. Să se verifice că incluziunea canonică $l^2 \to m$ este o aplicație liniară și continuă și să i se calculeze norma. Să se arate că l^2 nu este subspațiu închis în m și că $\overline{l^2} = c_0$ în m. Aceeași chestiune pentru l^p, cu $p \geqslant 1$.

+ 37. Există un spațiu Banach X, care nu este reflexiv, dar este izomorf cu X^{**}.

A 38. Fie X s.l.c. și $\{p_i\}_{i \in I}$ o familie de seminorme pe X. Notăm $X_i = X/\mathrm{Ker}\, p_i$ (conform ex. II. 3).

a) Să se arate că aplicația canonică $X \to \prod_{i \in I} X_i$ este injectivă dacă și numai dacă X este separat.

b) Să se arate că, pentru fiecare s.l.c. separat X, există o familie $\{E_i\}_{i\in I}$ de spații Banach, astfel încît X să fie izomorf algebric și topologic cu un subspațiu al lui $\prod_{i\in I} E_i$.

A 39. Să se arate că $f_n \to f$ în $\mathcal{C}([a, b])$, înzestrat cu norma uzuală, dacă și numai dacă $f_n \to f$ uniform pe $[a, b]$.

A 40. Fie X unul din spațiile: c_0, c, l^p $(p \geqslant 1)$ sau m. Să se arate că, dacă $x^k \to x$ în X, atunci $x_n^k \to x_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

A 41. Să notăm, pentru $p \geqslant 1$, X_p spațiul liniar $\mathcal{C}([0, 1])$ înzestrat cu norma $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$. Să se arate că $L^p([0, 1])$ se poate identifica cu completatul lui X_p.

A 42. Fie X spațiu normat. Să se arate că $x \to \|x\|$ este o aplicație uniform continuă pe X.

A 43. Fie $c_{00} = \{(x_n) \in c_0 \mid \exists n_0$ încît $x_n = 0, \ \forall \ n \geqslant n_0\}$. Să se arate că c_{00} este un subspațiu liniar dens în c_0.

A 44. Fie $\mathcal{C}^1([0, 1])$ spațiu liniar de la ex. 2, înzestrat cu norma $\|\cdot\|'$. Definim $T: \mathcal{C}^1([0, 1]) \to \mathcal{C}([0, 1]) \oplus \mathbf{R}$ prin $T(f) = (f', f(0))$. Să se arate că T este bijectiv, liniar, continuu și izometric. Să se deducă de aici că $(\mathcal{C}^1([0, 1]), \|\cdot\|')$ este spațiu Banach.

A 45. Dacă definim $T : l^1 \to bv$ prin $T((x_n)) = \sum_{k=n}^{\infty} x_k$, să se verifice că T este liniar, bijectiv, izometric și continuu. Să se scrie aplicația inversă.

B. 46. Fie X spațiu normat, $\widetilde{X}$ completatul său, $i : X \to \widetilde{X}$ incluziunea canonică. Să se arate că, pentru fiecare spațiu Banach Y și pentru fiecare aplicație liniară continuă $f : X \to Y$, există și este unică o aplicație liniară continuă $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ astfel încît $\widetilde{f} \circ i = f$.

B 47. Un spațiu normat X se numește *strict normat* dacă din $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ rezultă că x și y sînt liniar dependenți.

a) Să se verifice că $L^2([a, b])$ (mai general, orice spațiu Hilbert) este strict normat; dar $\mathcal{C}([a, b])$ și $L^1([a, b])$ nu sînt strict normate.

b) Următoarele afirmații sînt echivalente: 1) Există pe X o normă echivalentă, față de care X este strict normat. 2) Există un spațiu strict normat Y și o aplicație $T : X \to Y$, liniară, continuă și injectivă.

A 48. Cu notațiile din exercițiul 23, să se arate că nu există nici o aplicație LIM: $m \to \mathbf{R}$ avînd proprietățile a) — d) și, în plus: LIM $(x_n y_n) =$ $=$ LIM x_n. LIM y_n, $\forall \ (x_n), (y_n) \in m$.

A 49. Fie X, Y, Z spații normate, iar $f : X \times Y \to Z$ o aplicație biliniară. Să se arate că f este continuă dacă și numai dacă există M astfel încît $\|f(x, y)\| \leqslant M \|x\| \|y\|$, $\forall \ (x, y) \in X \times Y$.

A 50. Fie X spațiu normat separabil și $X_1 \subseteq X$ un subspațiu liniar. Să se arate că X_1 este separabil.

A 51. Fie X un spațiu strict normat, $X_1 \subseteq X$ un subspațiu liniar închis și $x \in X$. Să se arate că, în X_1, există cel mult un element de cea mai bună aproximare pentru x.

B 52. Fie X spațiu Banach, iar $X_1 \subseteq X$ un subspațiu care este fie de dimensiune finită, fie închis și de codimensiune finită. Atunci există un subspațiu $X_2 \subseteq X$ astfel încît $X = X_1 \oplus X_2$, iar suma directă să fie topologică.

B 53. Fie X spațiu Banach, $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ două subspații liniare. Dacă X_1 este închis și de codimensiune finită, atunci X_2 este închis și de codimensiune finită.

VI. SPAȚII NORMATE DE APLICAȚII LINIARE CONTINUE

A 1. a) Să se arate că există un izomorfism izometric între fiecare spațiu normat X și $L(\Gamma, X)$ (conform ex. I.7).

b) Utilizînd punctul precedent, să se arate că X este spațiu Banach dacă și numai dacă $L(X, Y)$ este spațiu Banach, oricare ar fi spațiul Banach Y.

A 2. a) Să definim $T : l^2 \to l^2$ prin $T((x_1, x_2, ...)) = (x_2, x_3, ...)$. Să se arate că T este liniar, continuu iar $\| T \| = 1$. Să se arate că T este surjectiv, dar nu este injectiv.

b) Să definim $S : l^2 \to l^2$ prin $S((x_1, x_2, ...)) = (0, x_1, x_2, ...)$. Să se arate că S este liniar continuu iar $\| S \| = 1$. Să se arate că S este injectiv, dar nu surjectiv: $S(l^2)$ este subspațiu liniar maximal închis în l^2.

A 3. Să definim $f : l^2 \to \Gamma$ prin $f((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n$. Să se verifice că f este bine definită, liniară, continuă și $\| f \| = \pi/\sqrt{6}$.

A 4. a) Se definește o aplicație $f : c \to \Gamma$ prin $f((x_n)) = \lim_{n \to \infty} x_n$. Să se arate că f este liniară, continuă și $\| f \| = 1$. Să se deducă de aici că c_0 este subspațiu liniar maximal închis în c.

b) Se definește $T : c \to c_0 \oplus \Gamma$ prin $T((x_n)) = ((x_n - f(x_n)),\ f((x_n)))$. Să se verifice că T este liniar, bijectiv și continuu. Să se scrie T^{-1}, să se verifice direct că T^{-1} este continuu și să se calculeze $\| T \|$ și $\| T^{-1} \|$.

A 5. Definim $T : m \to l^2$ prin $T((x_n)) = (n^{-1} x_n)$. Să se arate că T este corect definit, liniar și continuu. Să se calculeze $\| T \|$. Este T injectiv? dar surjectiv?

A 6. Fie X_1, X_2, Y spații normate.

a) Dacă $T_1 \in L(X_1, Y)$ și $T_2 \in L(X_2, Y)$ și definim $\varphi(T_1, T_2) = T$ prin $T : X_1 \oplus X_2 \to Y$, $T(x_1, x_2) = T_1(x_1) + T_2(x_2)$ atunci: $T \in L(X_1 \oplus X_2, Y)$ iar $\| T \| = \max \{ \| T_1 \|, \| T_2 \| \}$.

b) Dacă $T \in L(X_1 \oplus X_2, Y)$ și definim $\psi(T) = (T_1, T_2)$ prin $T_1 : X_1 \to Y$, $T_2 : X_2 \to Y$, $T_1(x_1) = T(x_1, 0)$; $T_2(x_2) = T(0, x_2)$ atunci: $T_1 \in L(X_1, Y)$ și $T_2 \in L(X_2, Y)$.

c) $\varphi : L(X_1, Y) \oplus L(X_2, Y) \to L(X_1 \oplus X_2, Y)$ și $\psi : L(X_1 \oplus X_2, Y) \to$ $\to L(X_1, Y) \oplus L(X_2, Y)$ sînt aplicații liniare, continue și inverse una alteia (se poate folosi ex. I.9).

A 7. Fie X un spațiu Banach, Y un spațiu normat iar $T \in L(X, Y)$ cu proprietatea că există $m > 0$ astfel încît $\| Tx \| \geqslant m \| x \|$, $\forall x \in X$. Să se arate că $T(X)$ este subspațiu liniar închis în Y.

A 8. Fie, cu notațiile din exercițiul V.2, $T : \mathcal{C}^1([0, 1]) \to \mathcal{C}^1([0, 1])$, definit prin: $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ ($\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ și $x \in [0, 1]$). Să se verifice că T este bine definit și liniar. Să se studieze apoi continuitatea lui T, atunci cînd $\mathcal{C}^1([0,1])$ este înzestrat cu una din cele trei norme, definite la ex. V.2 (atenție, sînt 9 cazuri de studiat!).

B 9. Fie X un spațiu normat, Y un spațiu Banach iar $X_1 \subseteq X$ un subspațiu liniar dens în X. Dacă $T_1 \in L(X_1, Y)$ atunci există și este unic $T \in L(X, Y)$ astfel încît $T \mid_{X_1} = T_1$ iar $\| T \| = \| T_1 \|$.

B 10. Fie K un spațiu topologic compact. O funcțională liniară $\mu : \mathcal{C}(K) \to \mathbf{R}$ se numește pozitivă, dacă oricare ar fi $f \in \mathcal{C}(K)$ cu $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in K$ avem $\mu(f) \geqslant 0$.

a) Să se arate că orice funcțională liniară pozitivă este continuă.

b) Oricare ar fi o funcțională liniară $\mu : \mathcal{C}(K) \to \mathbf{R}$, există două funcționale liniare pozitive μ_1, μ_2 astfel încît $\mu = \mu_1 - \mu_2$ (se poate defini $\mu_1(f) = \sup \{\mu(\varphi) \mid |\varphi| \leqslant f\}$). (O funcțională liniară continuă pe $\mathcal{C}(K)$ se numește *măsură Radon pe spațiul compact* K).

B 11. Fie X spațiu topologic local compact. Notăm $\mathcal{K}(X)$ mulțimea funcțiilor $f : X \to \mathbf{R}$ continue, cu suport compact. $\mathcal{K}(X)$ este spațiu liniar față de operațiile uzuale cu funcții reale.

a) Să se arate că familia de subspații $\{\mathcal{C}(K)\}$, unde $K \subseteq X$ parcurge mulțimea părților compact din X, îndeplinește condițiile din exercițiul IV.8.

b) O funcțională liniară $\mu : \mathcal{K}(X) \to \mathbf{R}$ este continuă în topologia limită inductivă dacă și numai dacă există μ_1, μ_2 funcționale liniare pozitive, astfel încît $\mu = \mu_1 - \mu_2$. (O funcțională liniară continuă pe $\mathcal{K}(X)$ se numește *măsură Radon.*)

A 12. Fie X, Y spații normate și $T : X \to Y$ o aplicație liniară cu proprietatea că mulțimea $\{Tx \mid \| x \| \leqslant 1\}$ este relativ compactă în Y. Să se arate că $T \in L(X, Y)$ (operator compact.)

A 13. Incluziunea canonică $(\mathcal{C}^1([0, 1]), \| \cdot \|') \to \mathcal{C}([0, 1])$ este operator compact (notațiile din ex. V.2.).

A 14. Fie X un spațiu normat. 1_X este operator compact dacă și numai dacă X este de dimensiune algebrică finită. Deci, dacă există $T \in L(X)$ compact și $T^{-1} \in L(X)$, atunci X este de dimensiune finită.

B 15. Pentru fiecare $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ și $x \in [0, 1]$ să definim: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}$ *(operatorul Bernstein).*

a) Să se arate că $B_n : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathcal{C}([0, 1])$ este un operator de rang finit.

b) Pentru fiecare $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, $B_n f \to f$ în $\mathcal{C}([0, 1])$.

c) Șirul $\{B_n\}$ are limită în $L(\mathcal{C}([0, 1]))$?

A 16. Fie X un spațiu normat, iar $K \in L(X)$ un operator compact. Notînd $T = 1_X - K$ să se arate că Ker T este un subspațiu de dimensiune algebrică finită.

A 17. Fie X, Y spații normate; $U \subseteq X$ o mulțime deschisă nevidă; $f : U \to Y$ o funcție oarecare; iar $x_0 \in U$. f se zice *diferențiabilă* (Fréchet)

în x_0 dacă există o aplicație liniară și continuă $d_{x_0}f : X \to Y$ și o funcție $\omega : X \to Y$ astfel încît: $f(x) = f(x_0) + d_{x_0}f(x - x_0) + \omega(x - x_0)\| x - x_0\|$, $\forall x \in X$ iar $\lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$. $d_{x_0}f$ se numește *diferențiala* funcției f în x_0.

a) Dacă f este diferențiabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0 iar diferențiala este unic determinată.

b) Dacă $X = \mathbf{R}^n$ și $Y = \mathbf{R}^m$, iar f este diferențiabilă în sens clasic, atunci este diferențiabilă Fréchet și, reciproc. $d_{x_0}f$ are ca matrice, în baza canonică, $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)$ (conform ex. I.11).

c) Dacă $\| \cdot \|_1$ este o normă pe X, echivalentă cu norma inițială, atunci diferențiabilitatea în raport cu $\| \cdot \|_1$ coincide cu diferențiabilitatea în raport cu $\| \cdot \|$.

A 18. Fie X, Y, Z spații normate.

a) Dacă $f : X \to Y$ este o aplicație constantă, atunci f este diferențiabilă în orice punct și $d_x f = 0$.

b) Dacă $f : X \to Y$ este o aplicație liniară și continuă atunci f este diferențiabilă în orice punct, iar $d_x f = f$.

c) Dacă $f : X \times Y \to Z$ este o aplicație biliniară și continuă, atunci f este diferențiabilă în orice punct, iar $d_{(x,y)}f(u, v) = f(x, v) + f(u, y)$.

A 19. Fie X, Y, Z spații normate, $U \subseteq X$ și $V \subseteq Y$ mulțimi deschise nevide, iar $f : U \to Y$, $g : V \to Z$ aplicații cu proprietatea că $f(U) \subseteq V$. Fie $x_0 \in U$ și să presupunem că f este diferențiabilă în x_0, iar g este diferențiabilă în $y_0 = f(x_0)$. Să se arate că gof este diferențiabilă în x_0, iar $d_{x_0}(gof) = (d_{y_0}g)$ o $(d_{x_0}f)$.

A 20. Să definim $f : l^2 \to l^1$ prin $f((x_n)) = (x_n^2)$. Să se arate că f este bine definită și diferențiabilă în orice punct.

A 21. Fie $f : c_0 \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \| x \|$. Să se arate că f este diferențiabilă în $x^\circ = (x_n^0) \in c_0$ dacă și numai dacă există exact un indice $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $| x_{n_0}^0 | = \| x^\circ \|$.

A 22. Fie $f : l^2 \to \mathbf{R}$ (mai general, pe orice spațiu Hilbert), definită prin $f(x) = \| x \|$. Să se arate că f este diferențiabilă în orice punct $x \neq 0$, iar $d_x f(u) = \| x \|^{-1} < u, x >$.

A 23. Fie X un spațiu Banach, Y un spațiu normat iar $T : X \to Y$ o aplicație liniară.

a) Dacă notăm $\| x \|_1 = \| x \| + \| Tx \|$, atunci $\| \cdot \|_1$ este o normă pe X.

b) Următoarele sînt echivalente: 1) T este continuu; 2) Normele $\| \cdot \|$ și $\| \cdot \|_1$ sînt echivalente; 3) $(X, \| \cdot \|_1)$ este spațiu Banach.

A 24. a) Fie X un spațiu Banach iar p o seminormă inferior semicontinuă pe X. Să se arate că există $M \geqslant 0$ astfel încît $p(x) \leqslant M \| x \|$ $\forall x \in X$ (se poate folosi ex. IV.14).

b) Fie X un spațiu Banach, Y un spațiu normat iar $T_i : X \to Y$ o familie de aplicații liniare, continui, punctual mărginită. Aplicînd rezultatul de mai sus pentru $p(x) = \sup_i \| T_i x \|$, să se regăsească principiul mărginirii uniforme.

A 25. Fie $\sigma(\mathbf{N})$ mulțimea bijecțiilor pe $\mathbf{N}$. Definim $\varphi : \sigma(\mathbf{N}) \to L(m)$ prin $\varphi(f)((x_n)) = (x_{f(n)})$. Să se arate că f este o aplicație injectivă; $\varphi(fog) = \varphi(f)$o $\varphi(g)$; fiecare $\varphi(f)$ este o aplicație izometrică și are ca inversă pe $\varphi(f^{-1})$.

A 26. a) Pentru fiecare $x = (x_n) \in m$; $y = (y_n) \in m$ să notăm $\psi(x)(y) = (x_n x_n)$. Să se verifice că în acest mod s-a definit o aplicație liniară izometrică $\psi : m \to L(m)$.

b) Dacă notăm $e \in m$ șirul cu toate componentele egale cu 1, iar $\alpha : L(m) \to m$ este definit prin $\alpha(T) = Te$, să se arate că α este liniară continuă și surjectivă, iar $\|\alpha\| = 1$. Să se verifice că $\alpha \circ \psi = 1_m$ dar $\psi \circ \alpha \neq 1_{L(m)}$.

B 27. a) Oricare ar fi $T \in L(c_0)$, există și sînt unic determinați $\alpha_{mn} \in \Gamma$ astfel încît (*) $T(e_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$, $\forall n \in \mathbf{N}$. În plus: 1°. $\lim_{m \to \infty} \alpha_{mn} = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$; 2°. $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| < +\infty$, $\forall m \in \mathbf{N}$; 3°. $\sup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| < +\infty$; 4° $\|T\| = \sup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}|$.

b) Reciproc, fiind dată o serie dublă (α_{mn}), cu proprietățile 1°, 2°, 3° de mai sus, există un singur $T \in L(c_0)$ astfel încît să aibă loc (*).

B 28. a) Oricare ar fi $T \in L(l^1)$, există și sînt unic determinați $\alpha_{mn} \in \Gamma$, astfel încît $T(e_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$ (*). În plus: 1°. $\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| < +\infty$; 2°. $\|T\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{mn}|$.

b) Reciproc, fiind dată o serie dublă (α_{mn}) care satisface 1° de mai sus, există și este unic $T \in L(l^1)$ astfel încît să aibă loc (*).

A 29. Cu notațiile din teorema 3, § 6.09, să se arate că $\|T_0\| \leqslant \liminf_{n \to \infty} \|T_n\|$

A 30. Fie X, Y spații normate, iar $X_1 \subseteq X$ un subspațiu liniar, dens în X. Dacă $T_1 \in L(X_1, Y)$ este compact, atunci operatorul $T \in L(X, Y)$ construit în ex. 9 este compact.

A 31. Fie X, Y spații normate, iar $T \in L(X, Y)$ operator compact. Atunci $T(X)$ este separabil.

A 32. Folosind teorema lui Jordan [18], să se regăsească rezultatul de la exercițiul 10 b), în cazul $K = [0, 1]$.

A 33. Fie Γ^n înzestrat cu una din normele: $\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$; $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$; $\|x\|_3 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \{|x_i|\}$. Să se verifice direct că orice aplicație liniară $T : \Gamma^n \to \Gamma^n$ este continuă.

A 34. Fie X, Y spații normate și $T \in L(X, Y)$. Să se arate că:

a) T nu este injectiv $\Leftrightarrow \exists\, S \in L(X)$, $S \neq 0$ astfel încît $TS = 0$.

b) $\overline{T(X)} \neq Y \Leftrightarrow \exists\, S \in L(Y)$, $S \neq 0$ astfel încît $ST = 0$ (se poate folosi ex. V.52).

B 35. Fie X, Y spații Banach, $T \in L(X, Y)$ se numește *operator Fredholm* dacă: Ker T este de dimensiune finită, iar $T(X)$ este subspațiu închis și de codimensiune finită în Y.

a) Dacă T este operator Fredholm, există $S \in L(Y, X)$ astfel încît $ST - 1_X$ și $TS - 1_Y$ să fie operatori de rang finit.

b) Dacă există S_1, $S_2 \in L(Y, X)$ astfel încît $S_1 T - 1_X$ și $TS_2 - 1_Y$ să fie operatori compacți, atunci T este operator Fredholm.

c) Folosind punctele precedente, să se arate că: (*i*) Dacă T este operator Fredholm, iar K operator compact, atunci $T + K$ este operator Fredholm. (*ii*) Mulțimea operatorilor Fredholm este deschisă în $L(X, Y)$. (*iii*), Dacă Z este spațiu Banach, iar $S \in L(Y, Z)$ este operator Fredholm și $T \in L(X, Y)$ este operator Fredholm, atunci ST este operator Fredholm.

VII. DUALITATE

Dacă X, Y sînt două spații liniare în dualitate, vom nota $\sigma(X, Y)$ topologia slabă pe X.

A 1. Fie X, Y două spații liniare în dualitate, iar $f : X \to \Gamma$ o funcțională liniară, $\sigma(X, Y)$ — continuă. Să se arate că există $y \in Y$ astfel încît $f(x) = \Phi(x, y)$, $\forall x \in X$. y astfel definit este unic dacă și numai dacă $\sigma(X, Y)$ este separată.

A 2. Fie X, Y două spații liniare în dualitate. Pentru fiecare $M \subseteq X$ notăm $M^\circ = \{y \in Y \mid \Phi(x, y) \leqslant 1, \ \forall x \in M\}$.

a) M° este o mulțime convexă și $\sigma(Y, X)$ — închisă.

b) Dacă M este echilibrată, atunci M° este echilibrată. Dacă M este subspațiu liniar, atunci M° este subspațiu liniar și $M^\circ = \{y \in Y \mid \Phi(x, y) = 0, \ \forall x \in M\}$.

c) Dacă $\lambda \neq 0$ și $\lambda M \subseteq N$, atunci $N^\circ \subseteq \lambda^{-1} M^\circ$.

d) $\left[\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha\right]^\circ = \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha^\circ$.

A 3. Fie X, Y două spații liniare reale în dualitate. Dacă $M \subseteq X$ este o mulțime finită, atunci M° este vecinătate a originii în topologia $\sigma(Y, X)$. Reciproc, pentru orice $\sigma(Y, X)$ — vecinătate a originii V, există o parte finită $M \subseteq X$ astfel încît $M^\circ \subseteq V$.

B 4. Fie X, Y două spații liniare reale în dualitate; presupunem că $\sigma(X, Y)$ este separată. Pentru $N \subseteq Y$ notăm: ${}^\circ N = \{x \in X \mid \forall y \in N, \Phi(x, y) \leqslant 1\}$. Să se arate că ${}^\circ(M^\circ)$ coincide cu înfășurătoarea convexă și $\sigma(X, Y)$ — închisă a mulțimii $M \cup \{0\}$. În particular, ${}^\circ(M^\circ) = M^\circ$ *(teorema bipolarei)*.

B 5. Fie X, Y spații liniare în dualitate, cu $\sigma(X, Y)$ separată. Definind $\varphi : X \to \Gamma^Y$ prin: $\varphi(x)(y) = \Phi(x, y)$, să se arate că φ este injectivă și stabilește un homeomorfism între X, cu topologia $\sigma(X, Y)$ și $\varphi(X)$, cu urma topologiei produs. Orice funcție din $\overline{\varphi(X)}$ este liniară.

B 6. Fie X un spațiu normat. Să se demonstreze că mulțimea $B = \{f \in X^* \mid \|f\| \leqslant 1\}$ este $\sigma(X^*, X)$ — compactă.

A 7. Fie X un spațiu normat real iar $M \subseteq X$ o mulțime convexă. Să se arate că M este închisă dacă și numai dacă este $\sigma(X, Y)$ — închisă.

A 8. a) Fie $f_n \in \mathcal{C}([0, 1])$ un șir slab convergent la $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Să se arate că $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$.

b) Fie $f_n \in \mathcal{C}([0, 1])$ un șir mărginit cu proprietatea că $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, iar $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Să se arate că $f_n \to f$ slab.

c) Fie $f_n(x) = n - n^2 \mid x - n^{-1}\mid$, $\forall\, x \in [0,\ 2n^{-1}]$ și $f_n(x) = 0$ în rest. Să se arate că ipoteza de mărginire nu poate fi omisă de la pct. b).

A 9. a) Fie X un spațiu Banach, $f_n \in X^*$ un șir cu proprietatea că $\{f_n(x)\}$ este convergent, $\forall x \in X$. Să se arate că există $f \in X^*$ astfel încît f_n converge slab* la f.

b) Fie X un spațiu Banach reflexiv, $x_n \in X$ un șir cu proprietatea că $\{f(x_n)\}$ converge, $\forall f \in X^*$. Să se arate că există $x \in X$ astfel încît x_n converge slab la x.

c) Luînd $X = \mathcal{C}([0,\ 1])$ și $x_n(t) = t^n$, să se verifice că nu se poate renunța la ipoteza de reflexivitate de la pct. b).

A 10. Fie X un spațiu normat. Completatul lui X este izometric cu un subspațiu din X^{**}.

A 11. Fie $X = c_{00}$ (conform ex. V.43) și $f_n : X \to \Gamma$, definite prin $f_n(x) = nx_n$ (unde $x = (x_n) \in c_{00}$). Să se verifice că familia $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este formată din funcționale liniare continue, este mărginită punctual, dar nu este mărginită uniform. Ce legătură are acest rezultat cu principiul mărginirii uniforme?

A 12. Fie X un spațiu normat. Să se arate că există un spațiu topologic compact K, astfel încît X să fie izometric cu un subspațiu al lui $\mathcal{C}(K)$.

B 13. Fie X un spațiu Banach reflexiv, $C \subseteq X$ o mulțime convexă și închisă. Să se arate că pentru fiecare $x_0 \in X$ există în C cel puțin un element de cea mai bună aproximare pentru x_0 (se pot folosi ex. 6 și ex. 14).

A 14. Fie X un spațiu normat. Să se arate că funcția $x \to \| x \|$ este slab inferior semicontinuă pe X.

A 15. Să notăm $BV_0 = \{ f \in BV \mid f(0) = 0,\ f$ continuă la dreapta$\}$ (conform ex. V.28). Să se verifice că $\mathcal{C}([0,\ 1])$ și BV_0 pot fi puse canonic în dualitate.

A 16. Să se arate că c_0 și l^1 pot fi puse canonic în dualitate.

A 17. Fie X un spațiu normat și $M \subseteq X$ (respectiv $N \subseteq X$). Să se arate că M° (respectiv ${}^\circ N$) este vecinătate a originii în X (respectiv X^*) dacă și numai dacă M (respectiv N) este mulțime mărginită (conform ex. 2 și 4).

A 18. a) Fie X un spațiu normat. Dacă X^* este de dimensiune algebrică finită, atunci X este de dimensiune algebrică finită.

b) Fie X un spațiu normat, pe care topologia normei coincide cu topologia slabă. Atunci X este de dimensiune algebrică finită. Reciproc?

A 19. În l^1 șirurile convergente în normă coincid cu șirurile convergente în topologia slabă. Deci există topologii distincte, care au aceleași șiruri convergente.

A 20. Să se arate că închiderea slabă a mulțimii $\{x \in l^2 \mid \| x \| = 1\}$ coincide cu $\{x \in l^2 \mid \| x \| \leq 1\}$.

A 21. Fie X un spațiu normat. Să se arate că orice mulțime din X este mărginită dacă și numai dacă este slab mărginită (conform ex. III.31).

A 22. Fie X un spațiu Banach. Să se arate că orice mulțime din X^* este mărginită dacă și numai dacă este slab * mărginită (conform ex. III.31).

B 23. Un spațiu Banach X este reflexiv dacă și numai dacă X^* este reflexiv.

B 24. Fie X un spațiu Banach reflexiv și $Y \subseteq X$ un subspațiu liniar închis. Atunci Y este spațiu Banach reflexiv.

A 25. a) Dacă X este spațiu normat iar X^* este separabil, atunci X este separabil.

b) Dacă X este spațiu Banach reflexiv și este separabil, atunci X^* este separabil.

c) Luînd $X = l^1$, să se arate că nu se poate renunța la ipoteza de reflexivitate de la pct. b).

B 26. a) Fie X un spațiu normat și separabil. Orice șir mărginit din X^* conține un subșir slab* convergent.

b) Fie X un spațiu Banach reflexiv și separabil. Orice șir mărginit din X conține un subșir slab convergent.

+ 27. Afirmația de la exercițiul 26 b) rămîne adevărată chiar dacă se renunță la ipoteza că X este separabil (teorema lui Eberlein-Smuljan).

A 28. a) Să se verifice că: Γ^n, l^p și $L^p([0, 1])$ sînt spații reflexive, pentru $p \in (1, +\infty)$.

b) Să se verifice că nici unul din spațiile Banach: c_0, c, l^1, m, $\mathcal{C}([0, 1])$, $L^1([0, 1])$ nu este reflexiv.

A 29. Fie X, Y spații liniare de dimensiune algebrică finită; $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{f_1, ..., f_m\}$ baze algebrice în X, respectiv Y; $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$, $\{f_1^*, ..., f_m^*\}$ bazele duale în X^*, respectiv Y^* (conform ex. I.2). Pentru $T \in L(X, Y)$, avînd matricea (a_{ij}), să se scrie matricea lui $T^* \in L(Y^*, X^*)$ în bazele duale (conform ex. I.11).

B 30. Fie K un spațiu topologic compact, X un spațiu Banach, iar $T \in L(X, \mathcal{C}(K))$.

a) Să se arate că prin: (*) $\tau(s)(x) = T(x)(s)$ se definește o funcție slab continuă $\tau : K \to X$, și avem: $\| T \| = \sup_{s \in K} \| \tau(s) \|$.

b) Reciproc, oricare ar fi $\tau : K \to X$ o aplicație slab continuă, prin formula (*) se definește un operator liniar continuu $T : X \to \mathcal{C}(K)$.

B 31. Dacă în enunțul exercițiului 30 se înlocuiește topologia slabă cu topologia normei, atunci rezultatele rămîn valabile, cerînd, în plus, ca T să fie operator compact.

B 32. Fie X, Y spații normate, iar $T \in L(X, Y)$. Să se arate că T este compact dacă și numai dacă $T' \in L(Y^*, X^*)$ este compact *(teorema lui Schauder)*.

A 33. a) Fie X spațiu normat. Topologia slabă pe X este cea mai puțin fină topologie pe X, pentru care toate funcțiile $f \in X^*$ sînt continue.

b) Fie T un spațiu topologic oarecare iar $\varphi : T \to X$ o funcție oarecare. φ este slab continuă dacă și numai dacă, oricare ar fi $f \in X^*$, $f \circ \varphi : T \to \Gamma$ este continuă.

c) Să se enunțe și să se demonstreze caracterizări analoge celor de la pct. a) și b), pentru topologia slab* pe X^*.

A 34. Fie X, Y spații normate și $T \in L(X, Y)$. Să se arate că T rămîne continuu, cînd pe X și Y se consideră topologiile slabe respective.

A 35. Fie X, Y două spații normate și $T \in L(X, Y)$. Să se arate că dacă cel puțin unul din spațiile X, Y este reflexiv, atunci T are următoarea proprietate *(slab compact)*: oricare ar fi $\{x_n\}$ un șir mărginit din X, șirul $\{Tx_n\}$ conține un subșir slab convergent.

A 36. a) Fie X un spațiu Banach reflexiv, Y un spațiu normat și $T \in L(X, Y)$. Notînd $B = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$, să se arate că mulțimea $T(B)$ este închisă în Y.

b) Cu notațiile din exercițiul VI.30, să se arate că $T(X) = T_1(X_1)$.

A 37. Fie X, Y spații normate. Pentru fiecare $x \in X$, definim $p_x : L(X, Y) \to \to \mathbf{R}_+$ prin $p_x(T) = \| Tx \|$.

a) Să se verifice că fiecare p_x este o seminormă, iar $\{p_x\}_{x \in X}$ este o familie suficientă de seminorme pe $L(X, Y)$. (Topologia indusă de această familie se numește topologia convergenței punctuale a operatorilor.)

b) Să se scrie un sistem fundamental de vecinătăți ale originii în topologia convergenței punctuale.

c) Să se arate că $T_n \to T$ în topologia convergenței punctuale dacă și numai dacă $T_n x \to Tx$, în Y, oricare ar fi $x \in X$.

A 38. Fie X, Y spații normate. Pentru fiecare $x \in X$ și $y' \in Y^*$, definim: $q_{x,y'} : L(X, Y) \to \mathbf{R}_+$ prin: $q_{x,y'}(T) = | y'(Tx) |$.

a) Să se verifice că fiecare $q_{x,y'}$, este o seminormă, iar $\{q_{x,y'}\}_{x \in X,\, y' \in Y^*}$ este o familie suficientă de seminorme pe $L(X, Y)$. (Topologia indusă se numește topologia convergenței slabe a operatorilor.)

b) Să se scrie un sistem fundamental de vecinătăți ale originii în topologia convergenței slabe.

c) Să se arate că $T_n \to T$ în topologia convergenței slabe dacă și numai dacă $y'(T_n x) \to y'(Tx)$, oricare ar fi $x \in X$ și $y' \in Y^*$.

A 39. Fie X, Y spații normate. Să se verifice că:

a) Topologia convergenței punctuale coincide cu urma pe $L(X, Y)$ a topologiei produs pe Y^X, cînd Y are topologia normei.

b) Topologia convergenței slabe coincide cu urma pe $L(X, Y)$ a topologiei produs pe Y^X cînd Y are topologia slabă. Din cele de mai sus să se deducă:

c) Dacă $Y = \Gamma$ atunci topologia convergenței punctuale și topologia convergenței slabe coincid cu topologia slab* pe X^*.

d) Topologia convergenței punctuale este mai fină decît topologia convergenței slabe.

e) Topologia normei pe $L(X, Y)$ este mai fină decît topologia convergenței punctuale.

A 40. Fie (X_1, Y_1, Φ_1), respectiv (X_2, Y_2, Φ_2), spații liniare în dualitate, Presupunem că $\sigma(Y_1, X_1)$ este separată iar $T : X_1 \to X_2$ o aplicație liniară. Atunci următoarele condiții sînt echivalente: (*i*) T este continuu în topologiile slabe. (*ii*) $x \to \Phi_2(Tx, y)$ este continuă, $\forall y \in Y_2$. (*iii*) $\exists\, T' : Y_2 \to Y_1$ liniar, astfel încît: $\Phi_2(Tx, y) = \Phi_1(x, T' y)$, $\forall x \in X_1$, $y \in Y_2$. În acest caz, $T' : Y_2 \to \to Y_1$ este continuu în topologiile slabe, iar $(T')' = T$.

B 41. Fie X, Y spații Banach, iar $T : X \to Y$ și $S : Y^* \to X^*$ două funcții *oarecare*, satisfăcînd relația: $y'(Tx) = (Sy')(x)$, $\forall\, x \in X$, $\forall y' \in Y^*$. Să se arate că T și S sînt liniare, continue iar $T' = S$.

A 42. Dacă X, Y sînt spații normate iar $T : X \to Y$ este o aplicație liniară, continuă în topologiile slabe pe X și Y, atunci $T \in L(X, Y)$.

A 43. Dacă pe Γ^n se consideră una din normele: $\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$, $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $\|x\|_3 = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{|x_i|\}$, să se determine norma corespunzătoare pe $(\Gamma^n)^*$, identificat canonic cu Γ^n.

VIII. SPAȚII HILBERT

Dacă nu se menționează contrariul, toate spațiile liniare sînt peste corpul numerelor complexe.

A 1. Fie X un spațiu liniar, $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i\in I}$ o bază algebrică în X. Definind: $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \overline{\mu_i}$ (unde $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ și $y = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$), să se arate că s-a obținut un produs scalar pe X. Să se compare norma definită de acest produs scalar cu cea considerată în exercițiul II.2.

A 2. Fie X un spațiu liniar, iar $f \in X^a \setminus \{0\}$. Notăm: $\langle x, y\rangle = f(x)\,\overline{f(y)}$.

a) Care din proprietățile produsului scalar sînt verificate de aplicația de mai sus?

b) Să se arate că s-a definit un produs scalar dacă și numai dacă X este de dimensiune algebrică 1.

A 3. Să se verifice că, dacă X este spațiu prehilbertian, atunci $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ dacă și numai dacă x și y sînt liniar dependenți.

A 4. a) Fie X un spațiu prehilbertian. Să se arate că următoarele egalități sînt echivalente: 1) $x \perp y$; 2) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ și $\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; 3) $\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$; 4) $\|x + y\| = \|x - y\|$ și $\|x + iy\| = \|x - iy\|$.

b) Cum trebuie modificat enunțul precedent, dacă X este real?

c) Să se interpreteze geometric (în $\mathbf{R}^2$ sau $\mathbf{R}^3$) echivalențele de la b).

B 5. Fie X un spațiu normat. Condiția necesară și suficientă ca să existe pe X un produs scalar, astfel încît $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$, $\forall x \in X$, este ca, oricare ar fi $x, y \in X$: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. Această relație poartă numele de *identitatea paralelogramului.*

A 6. a) Fie X un spațiu normat și să definim $r : X \times X \to \mathbf{R}$ prin: $r(0, 0) = 1$ și $r(x, y) = 1/2\ (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)\ (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{-1}$ dacă $(x, y) \neq (0, 0)$. Fie $M = \sup\{r(x, y) \mid (x, y) \in X \times X\}$; $m = \inf\{r(x, y) \mid (x, y) \in X \times X\}$. Să se arate că: $1/2 \leqslant m \leqslant 1 \leqslant M \leqslant 2$ iar $mM = 1$.

b) Să notăm, pentru $p \in [1, +\infty]$, $E_p = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, înzestrat cu norma: $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ dacă $p < +\infty$ și $\|(x, y)\|_\infty = \max\{(|x|, |y|\}$. Notînd M_p numărul definit la punctul precedent, corespunzător spațiului E_p, să se arate că, pentru fiecare $\alpha \in [1, 2]$, există $p \in [1, +\infty]$, astfel încît $M_p = \alpha$.

A 7. Fie X un spațiu prehilbertian, $X_0 \subseteq X$ un subspațiu de dimensiune algebrică finită, iar $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormală în X_0. Să se verifice prin calcul că, oricare ar fi o bază ortonormală $\{f_1, ..., f_m\}$ în X_0 și $x \in X$ are loc:

$\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i \rangle f_i$. Poate fi demonstrat și altfel acest rezultat?

A 8. Fie X un spațiu prehilbertian, $x_1, ..., x_n \in X$. Se numește *determinant Gram* al vectorilor $x_1, ..., x_n$ și se notează $G(x_1, ..., x_n) = \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1,...,n}$.

a) Fie $A = (\alpha_{ij})$ o matrice $n \times n$ și $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$, $i = 1, ..., n$. Să se arate că $G(y_1, ..., y_n) = |\det A|^2 \cdot G(x_1, ..., x_n)$.

b) Oricare ar fi vectorii $x_1, ..., x_n$, avem $G(x_1, ..., x_n) \geq 0$. $G(x_1, ..., x_n) = 0$ dacă și numai dacă $x_1, ..., x_n$ sînt liniar dependenți.

c) Să presupunem că $x_1, ..., x_n$ sînt liniar independenți. Dacă notăm $X_0 = \mathcal{J}(\{x_1, ..., x_n\})$, să se arate că:

d) $(x, X_0) = (G(x, x_1, ..., x_n))^{1/2} (G(x_1, ..., x_n))^{-1/2}$.

A 9. Să se arate că $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este o bază ortonormală în l^2, verificînd fiecare din condițiile echivalente din manual (§ 7.13', teorema 2).

A 10. Să se arate că mulțimea $K = \{(x_n) \in l^2 \mid |x_n| \leq n^{-1}, \forall n \in \mathbf{N}\}$ este compactă în l^2.

A 11. Să se verifice că orice spațiu prehilbertian este uniform convex (conform ex. V.25).

A 12. Fie $(X_i)_{i \in I}$ o familie de spații prehilbertiene. Notăm: $\bigoplus_{i \in I} X_i = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < \infty\}$. Să se verifice că, prin: $\|(x_i)\| = (\sum_{i \in I} \|x_i\|^2)^{1/2}$, se obține o normă pe $\bigoplus_{i \in I} X_i$, care este indusă de un produs scalar. $\bigoplus_{i \in I} X_i$ se numește *suma directă hilbertiană a spațiilor* X_i.

A 13. Dacă toate spațiile X_i din exercițiul 12 sînt spații Hilbert, atunci $\bigoplus_{i \in I} X_i$ este spațiu Hilbert.

A 14. Folosind notațiile din exercițiul 12, fie $X_i = \Gamma$, $\forall i \in I$, cu structura de spațiu Hilbert uzuală. $\bigoplus_{i \in I} X_i$ se notează în acest caz cu $l^2(I)$. Să se arate că, pentru fiecare spațiu Hilbert X, există o mulțime I, astfel încît X și $l^2(I)$ să fie izomorfe ca spații Hilbert (deci să existe o aplicație liniară, bijectivă, care să conserve produsul scalar între X și $l^2(I)$).

B 15. Fie X un spațiu Hilbert iar $(X_i)_{i \in I}$ o familie de subspații închise, ortogonale două cîte două, și astfel încît $\bigcup_{i \in I} X_i$ să fie o mulțime totală în X. Să se arate că există o aplicație liniară, bijectivă, care conservă produsul scalar $f: \bigoplus_{i \in I} X_i \to X$, unic determinată de condiția ca $f|_{X_i}$ să fie incluziunea canonică, $\forall i \in I$.

A 16. a) Fie X un spațiu Hilbert. Să se arate că X^* este, de asemenea, spațiu Hilbert.

b) Fie $J_X : X \to X^*$ aplicația definită prin $J_X(x)(u) = \langle u, x\rangle$. Să se arate că $J_{X^*} \circ J_X : X \to X^{**}$ coincide cu izomorfismul natural. Deci orice spațiu Hilbert este reflexiv.

A 17. Fie $f(x) = -1$ dacă $x \in [-\pi, 0]$ și $f(x) = 1$ dacă $x \in (0, \pi]$.

a) Să se scrie coeficienții Fourier ai lui f în baza ortonormală: $\{(2\pi)^{-1/2}, (\pi)^{-1/2} \sin t, (\pi)^{-1/2} \cos t, \ldots, (\pi)^{-1/2} \sin nt, (\pi)^{-1/2} \cos nt, \ldots\}$ din $L^2([-\pi, \pi])$.

b) Să se demonstreze că seria Fourier corespunzătoare lui f este uniform convergentă pe orice compact din $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Să se stabilească astfel suma acestei serii.

c) Scriind identitatea lui Parseval, să se demonstreze că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

A 18. Fie X spațiu Hilbert iar $A \subseteq X$ o parte oarecare. Să se demonstreze următoarele relații: $(i) A^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{J}(A)}$; $(ii) A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$; (iii) Dacă A este subspațiu liniar, atunci: $A^{\perp\perp} = \overline{A}$; (iv) Dacă A este subspațiu liniar închis, atunci $A^{\perp\perp} = A$.

A 19. Fie X spațiu prehilbertian iar $T : X \to X$ liniar. Să se arate că $T = 0$ dacă și numai dacă $\langle Tx, x\rangle = 0$, $\forall x \in X$.

A 20. Fie X, Y două spații Hilbert. Dacă $T' \in L(Y^*, X^*)$ este operatorul definit în manual § 6.23; iar $T^* \in L(Y, X)$ este operatorul definit în § 7.17, ce legătură există între T' și T^*?

A 21. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$. Să se arate că următoarele condiții sînt echivalente: 1) $\exists m > 0$ astfel încît $\| Tx \| \geqslant m \| x \|$, $\forall x \in X$. 2) $\exists S \in L(X)$ astfel încît $S \circ T = 1_X$.

A 22. Fie X un spațiu Hilbert. Spunem că un operator $T \in L(X)$ este *mărginit inferior*, dacă există $m > 0$ astfel încît $\| Tx \| \geqslant m \| x \|$, $\forall x \in X$. Să se arate că următoarele condiții sînt echivalente: 1) $\exists T^{-1} \in L(X)$. 2) T și T^* sînt mărginiți inferior. 3) T este mărginit inferior, iar T^* este injectiv. 4) T este mărginit inferior și $\overline{T(X)} = X$.

A 23. Fie X un spațiu Hilbert iar $T \in L(X)$ cu proprietatea că $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$, $\forall x \in X$. Să se arate că $(1_X + T)^{-1} \in L(X)$. În particular, oricare ar fi $T \in L(X)$, avem $(1_X + T^* T)^{-1} \in L(X)$.

A 24. Fie X, Y spații Hilbert și $T \in L(X, Y)$. Să se arate că: $\mathrm{Ker}(T^*) = T(X)^{\perp}$; $\mathrm{Ker}(T) = T^*(Y)^{\perp}$; $\overline{T(X)} = \mathrm{Ker}(T^*)^{\perp}$; $\overline{T^*(Y)} = \mathrm{Ker}\,(T)^{\perp}$.

A 25. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$. Dacă presupunem că $\| T \| \leqslant 1$ atunci $Tx = x$ dacă și numai dacă $T^* x = x$.

A 26. Fie X un spațiu Hilbert iar $T \in L(X)$. Să se arate că $T(X)$ este de dimensiune algebrică 1 dacă și numai dacă există y, $z \in X \setminus \{0\}$, astfel încît $Tx = \langle x, z\rangle y$, $\forall x \in X$. Atunci au loc și: $T^* x = \langle x, y\rangle z$, $\forall x \in X$; $\| T \| = \| y \| \cdot \| z \|$; $T^2 = \mu T$ ($\mu \in \mathbb{C}$). Să se indice condiții necesare și suficiente asupra lui y și z astfel încît T să fie, respectiv: normal, autoadjunct, proiector, unitar.

A 27. Fie X un spațiu Hilbert, $X_1 \subseteq X$ un subspațiu liniar închis. Fie $x \in X$ și $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_1^{\perp}$. Dacă definim $\varphi : X/X_1 \to X_1$ prin $\varphi(x + X_1) = x_2$, să se verifice că φ este corect definită, liniară, bijectivă și izometrică.

A 28. Dacă $T \in L(L^2([a, b]))$ este definit prin: $(Tx)(u) = \int_a^b K(u, v)\ x(v)\ dv$, unde $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$, atunci: $(T^*x)(u) = \int_a^b \overline{K(v, u)}\ x(v)dv$.

A 29. Se definesc următoarele aplicații: 1) $T((x_n)) = (n^{-1}(n-1)\ x_n)$; 2) $T((x_n)) = (i^n x_n)$, $i^2 = -1$; 3) $T((x_n)) = (x_2, x_3, \ldots)$. Să se arate că, în toate cazurile, $T \in L(l^2)$. Să se determine T^* și să se studieze dacă T este: normal, autoadjunct, unitar.

A 30. Fie X spațiu Hilbert, $T \in L(X)$ operator autoadjunct și să notăm $R = T + i1_X$ (unde $i^2 = -1$).

a) R este normal.

b) Demonstrînd egalitatea: $\| Rx \|^2 = \| Tx \|^2 + \| x \|^2$, $\forall\, x \in X$, să se arate că R este injectiv.

c) Folosind punctul precedent, să se arate că $R^{-1} \in L(X)$.

d) Să se verifice că $U = R^*R^{-1}$ este operator unitar (U se numește *transformatul Cayley* al lui T).

A 31. Fie X spațiu Hilbert, iar $T \in L(X)$. Să se verifice că T este autoadjunct dacă și numai dacă $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}$, $\forall x \in X$.

A 32. Fie X un spațiu Hilbert. Pentru orice doi operatori autoadjuncți T_1, $T_2 \in L(X)$, notăm $T_1 \leqslant T_2$ dacă: $\langle T_1 x, x\rangle \leqslant \langle T_2 x, x\rangle$. $\forall x \in X$. Să se arate că s-a definit astfel o relație de ordine, compatibilă cu structura de spațiu liniar real pe spațiul operatorilor autoadjuncți.

A 33. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$. Să se verifice că următoarele condiții sînt echivalente: 1) $\|Tx\| \leqslant \| x \|$, $\forall x \in X$; 2) $\| T \| \leqslant 1$; 3) $T^*T \leqslant 1$; 4) $TT^* \leqslant 1$; 5) $\| T^* \| \leqslant 1$; 6) $\|T^*T\| \leqslant 1$.

A 34. Oricare ar fi spațiul Hilbert X și $T \in L(X)$, $S \geqslant 0$ implică $T^*ST \geqslant 0$. În particular, $T^*T \geqslant 0$.

A 35. Fie X un spațiu Hilbert, S, $T \in L(X)$. Să se arate că $S^*S = T^*T$ dacă și numai dacă $\langle Sx, Sy\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$, $\forall x, y \in X$.

A 36. Fie X un spațiu Hilbert și $P \in L(X)$ un proiector. Să se verifice următoarele proprietăți: 1) $0 \leqslant \langle Px, x\rangle \leqslant \| x\|^2$, $\forall x \in X$; 2) Dacă $P \neq 0$ atunci $\| P \| = 1$; 3) Ker $P = \{x \in X \mid \langle Px, x\rangle = 0\}$; 4) $P(X) = \{x \in X \mid Px = x\}$.

A 37. Fie X un spațiu Hilbert, $P \in L(X)$ este proiector dacă și numai dacă $P^*P = P$.

A 38. Fie X un spațiu Hilbert, iar P_1, P_2 doi proiectori. Următoarele condiții sînt echivalente: 1) $P_2 - P_1$ este proiector; 2) $P_1P_2 = P_1$; 3) $P_2P_1 = P_1$; 4) $\| P_2x \| \geqslant \| P_1x \|$, $\forall x \in X$; 5) $]\text{Ker } P_1 \supseteq \text{Ker } P_2$; 6) $P_1(X) \subseteq P_2(X)$. 7) $P_1 \leqslant P_2$.

Dacă $(P_2 - P_1)$ este proiector, să se verifice că $(P_2 - P_1)(X)$ este complementul ortogonal al lui $P_1(X)$ în $P_2(X)$.

A 39. Fie X un spațiu Hilbert, iar P_1, P_2 doi proiectori. Următoarele condiții sînt echivalente: 1) $P_1P_2 = P_2P_1$; 2) P_1P_2 este proiector; 3) $P_1 + P_2 - P_1P_2$ este proiector.

Dacă P_1P_2 este proiector, atunci $P_1P_2(X) = P_1(X) \cap P_2(X)$.

A 40. Fie X un spațiu Hilbert, iar P_1, P_2 doi proiectori. Următoarele condiții sînt echivalente: 1) $P_1 + P_2$ este proiector; 2) $P_1P_2 = 0$; 3) $P_2P_1 = 0$; 4) $P_1(X) \perp P_2(X)$.

Dacă $P_1 + P_2$ este proiector, atunci $(P_1 + P_2)(X) = P_1(X) \oplus P_2(X)$.

B 41. Fie X un spațiu Hilbert, iar $T \in L(X)$.

a) Să se arate că $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T$.

b) T^*T este proiector dacă și numai dacă TT^* este proiector.

c) Să notăm $Q = T^*T$ și $P = TT^*$. Dacă P este proiector, atunci $T|_{Q(X)}$ este o bijecție de la $Q(X)$ la $P(X)$, iar $T^*|_{P(X)}$ este aplicația inversă (în această situație, T se numește *parțial izometric*).

A 42. Fie X un spațiu Hilbert, $X_1 \subseteq X$ un subspațiu liniar închis, iar P proiectorul pe X_1.

a) $T \in L(X)$ satisface $T(X_1) \subseteq X_1$ dacă și numai dacă $PTP = TP$.

b) $T \in L(X)$ satisface: $T(X_1) \subseteq X_1$ și $T^*(X_1) \subseteq X_1$ dacă și numai dacă $PT = TP$.

A 43. Fie H un spațiu Hilbert, $T \in L(H)$ iar $P \in \mathbf{C}[X]$. Dacă notăm: $P(T) = a_0 1_X + a_1 T + \ldots + a_n T^n$ (unde $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$), atunci:

a) Dacă $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, iar T este autoadjunct, atunci $P(T)$ este autoadjunct;

b) Dacă T este normal, atunci $P(T)$ este normal.

A 44. Fie X un spațiu Hilbert, $\{e_i\}_{i \in I}$ o bază ortonormală, iar $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ o familie arbitrară de numere complexe.

a) Să se indice o condiție necesară și suficientă asupra familiei $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, astfel încît să existe $T \in L(X)$ cu proprietatea că $Te_i = \alpha_i e_i$, $\forall i \in I$.

b) În cazul în care există T ca la punctul precedent, să se determine T^* și să se indice condiții necesare și suficiente asupra familiei $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ astfel încît T să aibă, respectiv, una din proprietățile: normal, autoadjunct, proiector, unitar.

A 45. Să definim $T_k : l^2 \to l^2$ prin: $T_k((x_n)) = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots)$. Să se calculeze T_k^* și apoi să se verifice că $\lim_{k \to \infty} T_k x = 0$, $\forall x \in l^2$; dar există $x_0 \in l^2$ astfel încît șirul $\{T_k^* x_0\}$ să nu aibă limită în l^2. Deci corespondența $T \to T^*$ nu este continuă, atunci cînd $L(l^2)$ este înzestrat cu topologia convergenței punctuale (conform exercițiul VII.37).

A 46. Fie X un spațiu Hilbert. Dacă șirul $\{x_n\}$ este slab convergent la x, atunci: ($\{x_n\}$ converge în normă la x) $\Leftrightarrow$ ($\| x_n \| \to \| x \|$).

A 47. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$. Să se verifice că: $G(T^*) = (VG(T))^\perp$, unde $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$; $V : X \times X \to X \times X$ este definit prin $V(x, y) = (-y, x)$; iar pe $X \times X$ se consideră produsul scalar: $\langle (x, y), (x_1, y_1) \rangle = \langle x, x_1 \rangle + \langle y, y_1 \rangle$.

A 48. Fie X un spațiu Hilbert, iar $T \in L(X)$ un operator autoadjunct și pozitiv (adică $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$). Să se demonstreze inegalitățile: $\| Tx \|^4 \leq \langle Tx, x \rangle \langle T^2 x, Tx \rangle$, $\forall x \in X$ și $\| Tx \|^2 \leq \| T \| \langle Tx, x \rangle$.

A 49. a) Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$ autoadjunct. Dacă există $m > 0$ astfel încît $\| Tx \| \geq m \| x \|$, $\forall x \in X$, atunci $T^{-1} \in L(X)$.

b) Fie X spațiul liniar al polinoamelor cu coeficienți în $\mathbf{C}$; definim pe X produsul scalar: $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\overline{Q(t)}dt$ și operatorul $T : X \to X$ prin $T(P)(t) = (1 + t)P(t)$. Să se arate că: $\langle T(P), Q\rangle = \langle P, T(Q)\rangle$, $\forall P,Q \in X$; $\| T(P) \| \geqslant \| P \|$, $\forall P \in X$; $T(X)$ este dens în X, dar $T(X) \neq X$. De ce nu se aplică punctul precedent?

A 50. Pentru fiecare $g \in L^2([0, 1])$ definim $T(g)(t) = \operatorname{tg}(t)$. Să se arate că $T \in L(L^2([0,1]))$ și T este autoadjunct. Să se calculeze $\| T \|$.

A 51. Fie X un spațiu Hilbert, $T \in L(X)$ și $\{T_n\}$ un șir slab convergent în $L(X)$ la T (conform ex. VII.38). Dacă fiecare T_n este autoadjunct, atunci T este autoadjunct.

A 52. Fie X_1, X_2 spații Hilbert, $\{e_i\}_{i \in I}$ o bază ortonormală în X_1, $\{f_j\}_{j \in J}$ o bază ortonormală în X_2 iar $T \in L(X_1, X_2)$.

a) Să se verifice egalitățile: $\sum_{i \in I} \| Te_i \|^2 = \sum_{j \in J} \| T^* f_j \|^2 = \sum_{(i,j) \in I \times J} |\langle Te_i, f_j\rangle|^2$.

b) Folosind punctul precedent, să se arate că: $N(T) = (\sum_{i \in I} \|Te_i\|^2)^{1/2}$ nu depinde de alegerea bazei $\{e_i\}_{i \in I}$.

c) Să se arate că: $N(T_1 + T_2) \leqslant N(T_1) + N(T_2)$; $N(\lambda T) = |\lambda|\ N(T)$; $\| T \| \leqslant N(T)$.

A 53. Cu notațiile din exercițiul 52, fie $\mathcal{H}(X_1, X_2) = \{T \in L(X_1, X_2) \mid N(T) < +\infty\}$ ($T \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$ se numește *operator Hilbert-Schmidt*).

a) Folosind exercițiul 52 c), să se arate că $\mathcal{H}(X_1, X_2)$ este subspațiu liniar în $L(X)$.

b) Să se arate că $N(T) = N(T^*)$. Deci $T \in \mathcal{H}(X_1, X_2) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{H}(X_2, X_1)$.

c) În cazul în care compunerea are sens, $N(ST) \leqslant \| S \| N(T)$ și $N(ST) \leqslant \leqslant \| T \| N(S)$. Deci, oricare ar fi spațiile Hilbert X, Y; $U \in L(X, X_1)$, $S \in L(X_2, Y)$ și $T \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$, avem $STU \in \mathcal{H}(X, Y)$.

B 54. Cu notațiile din exercițiul 53, să se arate că $T \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$ dacă și numai dacă există un șir de operatori de rang finit $T_n \in L(X_1, X_2)$ astfel încît $N(T - T_n) \to 0$. Să se deducă de aici că orice operator Hilbert-Schmidt este compact.

B 55. Cu notațiile din exercițiul 53, fie, pentru $T, S \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$: $r(T, S) = \sum_{i \in I} \langle Te_i, Se_i\rangle$. Să se verifice că seria din dreapta este absolut convergentă, iar suma ei este independentă de alegerea bazei ortonormale $\{e_i\}_{i \in I}$. $r(\cdot, \cdot)$ este un produs scalar pe $\mathcal{H}(X_1, X_2)$ față de care $\mathcal{H}(X_1, X_2)$ este spațiu Hilbert.

B 56. a) Fie $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ și $f \in L^2([0, 1])$. Definim: $v_K(f)(t) = \int_0^1 K(\tau, t)\, f(\tau)\, d\tau$. Să se verifice că $v_K \in L(L^2([0, 1]))$.

b) Să se arate că v_K este operator Hilbert-Schmidt iar: $N(v_K) = \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(t, t')|^2\, dt\, dt'\right)^{1/2}$ (conform ex. 53).

B 57. Cu notațiile din exercițiul 44, să se arate că T este compact dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists J \subseteq I$ o parte finită, astfel încît $|\alpha_i| < \varepsilon$, $\forall i \notin J$. În particular, dacă X este separabil, atunci T este compact dacă și numai dacă $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.

A 58. Cu notațiile din exercițiul 44, să se arate că T este operator Hilbert-Schmidt dacă și numai dacă $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty$.

A 59. Fie $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ două familii de spații prehilbertiene, iar $T_i \in L(X_i, Y_i)$ cu $\sup\{\|T_i\| \mid i\in I\} < +\infty$. Cu notațiile din exercițiul 12, să se arate că există $T\in L(\bigoplus_{i\in I} X_i, \bigoplus_{i\in I} Y_i)$ unic determinat de condiția $T|_{X_i} = T_i$, $\forall\, i\in I$. În ipoteze evidente, să se verifice formulele: $\bigoplus_{i\in I}(T_i + S_i) = \bigoplus_{i\in I} T_i + \bigoplus_{i\in I} S_i$; $\bigoplus_{i\in I}(\lambda T_i) = \lambda \bigoplus_{i\in I} T_i$; $(\bigoplus_{i\in I} T_i)^* = \bigoplus_{i\in I} T_i^*$; $\bigoplus_{i\in I} T_i \circ \bigoplus_{i\in I} S_i = \bigoplus_{i\in I}(T_i \circ S_i)$.

A 60. Fie X, Y spații liniare. O aplicație $f: X \times Y \to \mathbf{C}$ se numește *formă sesquiliniară* dacă: $f(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda f(x_1, y) + \mu f(x_2, y)$, $f(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \bar{\lambda} f(x, y_1) + \bar{\mu} f(x, y_2)$.

a) Fie X, Y spații prehilbertiene. O formă sesquiliniară este continuă dacă și numai dacă există $M \geqslant 0$ astfel încît: $|f(x, y)| \leqslant M \|x\| \|y\|$, $\forall\,(x, y)\in X \times Y$. În acest caz, notînd $\|f\| = \sup\{|f(x, y)| \mid \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1\}$, $\|f\|$ este cel mai mic dintre numerele M care satisfac inegalitatea de mai sus.

b) Fie $T\in L(X, Y)$ și să notăm: $f_T(x, y) = \langle Tx, y\rangle$. Să se verifice că f_T este o formă sesquiliniară continuă, iar $\|f_T\| = \|T\|$.

c) Dacă X, Y sînt spații Hilbert, atunci, pentru fiecare formă sesquiliniară continuă f, există $T\in L(X, Y)$, unic determinat de condiția: $f(x, y) = \langle Tx, y\rangle$, $\forall (x, y)\in X \times Y$.

A 61. Fie X un spațiu Hilbert iar $f: X \times X \to \mathbf{C}$ o formă sesquiliniară continuă, pozitiv definită (adică există $\alpha > 0$ astfel încît $f(x, x) \geqslant \alpha \|x\|^2$, $\forall x\in X$). Să se arate că există $T\in L(X)$ unic determinat de condiția $f(x, Ty) = \langle x, y\rangle$; T este bijectiv, iar $T^{-1}\in L(X)$ *(teorema lui Lax-Milgram)*.

B 62. Fie X un spațiu Hilbert și $\{x_n\}$ un șir mărginit din X. Să se arate că există $x\in X$ și un subșir $\{x_{n_k}\}$ astfel încît:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{x_{n1} + \ldots + x_{nk}}{k} - x \right\| = 0 \quad \textit{(teorema lui Banach-Saks)}.$$

A 63. Fie Γ^n înzestrat cu structura de spațiu euclidian uzuală. Dacă $T\in L(\Gamma^n)$ are matricea $A = (a_{ij})$ în baza canonică (cf. ex. I.11) atunci T^* are matricea $t_A = (\bar{a}_{ji})$.

A 64. Să definim în l^2 vectorii: $a_n = e_{2n}$ și $b_n = e_{2n} + (n+1)^{-1} e_{2n-1}$. Fie apoi A (respectiv B) subspațiile liniare închise generate de $\{a_n \mid n\in\mathbf{N}\}$ (respectiv $\{b_n \mid n\in\mathbf{N}\}$). Să se verifice că: $A \cap B = \{0\}$; $A + B$ este un subspațiu liniar dens în l^2, dar diferit de l^2.

A 65. Fie X spațiu Hilbert, iar $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar. X_1 este dens în X dacă și numai dacă este total.

A 66. Fie X spațiu Hilbert și $T\in L(X)$. Să se verifice că $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

A 67. Dacă X, Y sînt spații Hilbert și $T\in L(X, Y)$ este operator compact, atunci există un șir de operatori de rang finit $T_n\in L(X, Y)$ astfel încît $\|T - T_n\| \to 0$.

A 68. Notăm $H - L^2$ mulțimea funcțiilor olomorfe pe $\{z\in\mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ care satisfac: $\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,d\theta < +\infty$. Atunci: $\|f\| = \sup_{0<r<1} ((2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,d\theta)^{1/2}$ este o normă, față de care $H - L^2$ este spațiu Hilbert separabil.

A 69. Fie X spațiu Hilbert, iar $T_n \in L(X)$ un șir de operatori autoadjuncți, astfel încît: $0 \leqslant T_n \leqslant 1$ și $T_n \leqslant T_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Să se arate că există $T \in L(X)$ astfel încît $T_n \to T$ în $L(X)$.

IX. TEORIE SPECTRALĂ

Toate spațiile liniare vor fi considerate peste corpul numerelor complexe.

A 1. Fie X un spațiu Hilbert, iar $P \in L(X)$ un proiector. Dacă presupunem că $P \neq 0$ și $P \neq 1_X$, atunci $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\}$, iar $R(\lambda; P) = \lambda^{-1} \cdot 1_X + \lambda^{-1}(\lambda - 1)^{-1} P$. ($\sigma_p(P)$ desemnează mulțimea valorilor proprii ale operatorului P).

A 2. Fie $T \in L(l^2)$ operatorul definit prin $T((x_1, x_2, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots)$ (conform ex. VIII.29).

a) Să se determine $\sigma(T)$, $\sigma(T^*)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_p(T^*)$.

b) Să se verifice că: dacă $|\lambda| < 1$, $(\lambda \cdot 1_X - T)(l^2)$ nu este dens în l^2; dacă $|\lambda| = 1$, $(\lambda \cdot 1_X - T)(l^2)$ este dens în l^2 dar diferit de l^2; iar dacă $|\lambda| > 1$, atunci: $\|(\lambda \cdot 1_X - T)^{-1}\| \leqslant (|\lambda| - 1)^{-1}$.

c) Este operatorul T^* compact?

A 3. Fie $K \subseteq \mathbf{C}$ o mulțime compactă, infinită. Dacă $\{\rho_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ este o parte numărabilă, densă în K, iar $T((x_n)) = (\rho_n x_n)$ atunci: $T \in L(l^2)$; $\sigma(T) = K$ iar $\sigma_p(T) = \{\rho_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Să se verifice că, dacă $\rho \in K$ și $\rho \neq \rho_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci $(\rho 1_X - T)(l^2)$ este dens în l^2 și diferit de l^2.

A 4. a) Fie X un spațiu Hilbert iar T, $S \in L(X)$. Să se arate că: $\sigma(TS) \setminus \{0\} = \sigma(ST) \setminus \{0\}$.

b) Alegînd $X = l^2$, să se arate că există situații în care $\sigma(TS) \neq \sigma(ST)$.

c) Să se arate că $\sigma_p(TS) \setminus \{0\} = \sigma_p(ST) \setminus \{0\}$ dar există cazuri în care $\sigma_p(TS) \neq \sigma_p(ST)$.

A 5. Fie X un spațiu Banach, $T \in L(X)$ și $\lambda \in \rho(T)$. Să se arate că $T.R(\lambda; T) = R(\lambda; T) . T$.

A 6. Fie X un spațiu Banach și $T \in L(X)$.

a) $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \overline{\lambda} \in \sigma(T)\}$.

b) Dacă $T^{-1} \in L(X)$ atunci $0 \notin \sigma(T)$ și $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \lambda^{-1} \in \sigma(T)\}$.

c) Dacă $P \in \mathbf{C}[X]$, atunci $\sigma(P(T)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

A 7. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$. Notăm $r(T)$ și numim *raza spectrală a operatorului* T numărul: inf. $\{\|T^n\|^{1/n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. a) Să se arate că $r(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$.

b) $r(T) \leqslant \|T\|$. Dacă T este normal, atunci $r(T) = \|T\|$.

B 8. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$. $r(T)$ este cel mai mic număr $\alpha \geqslant 0$, cu proprietatea că $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leqslant \alpha\}$.

B 9. Fie X un spațiu Hilbert, iar $T \in L(X)$ un operator compact și normal.

a) Notînd $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$, să se arate că aplicația $(x, y) \to \langle Tx, y\rangle$ este slab continuă pe $B \times B$.

b) Să se arate că T are cel puțin o valoare proprie de modul $\|T\|$.

c) Folosind cele de mai sus, să se arate că există o bază ortonormală $\{e_i\}_{i\in I}$ în X, astfel încît $Te_i = \alpha_i e_i$, iar $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ sînt toate valorile proprii ale lui T.

B 10. Fie $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ o mulțime deschisă, relativ compactă; iar X un spațiu Hilbert separabil. Să se arate că există $T\in L(X)$ astfel încît $\sigma_p(T) = \Omega$ iar $\sigma(T) = \overline{\Omega}$.

A 11. Fie $T: l^2 \to l^2$ definit prin: $T((x_1, x_2, \dots)) = \left(\frac{2}{1}x_1, \frac{3}{2}x_2, \dots\right)$.

a) Să se verifice că $T\in L(l^2)$ și $\|T\| = 2$.

b) Să se arate că $\sigma_p(T) = \{\lambda\in\mathbf{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$.

c) Să se arate că $r(T) = 1$.

Folosind exercițiul 8, să se deducă $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Acest exemplu arată că există cazuri în care $r(T) < \|T\|$.

A 12. Fie X un spațiu Hilbert, iar $T\in L(X)$ un operator Hilbert-Schmidt.

a) Notînd $S = T^*T$, să se arate că S este operator compact autoadjunct. Deci, notînd $\{\lambda_n \mid n\in\mathbf{N}\}$ mulțimea valorilor proprii ale lui S, avem $\lambda_n \geqslant 0$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

b) Să se arate că $N(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)^{1/2}$ (conform ex. VIII. 52).

B 13. Fie v_K operatorul definit la exercițiul VIII. 56.

a) Dacă presupunem $K(t, t') = \overline{K(t', t)}$, $\forall(t, t')\in[0,1]\times[0,1]$, să se arate că v_K este autoadjunct. Vom nota, conform exercițiului 9, $\{\lambda_n \mid n\in N\}$ mulțimea valorilor proprii iar $\{\varphi_n\}$ o bază ortonormală în $L^2([0,1])$, pentru care: $v_K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$. Se va observa că $\lambda_n\in\mathbf{R}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

b) Fie $f\in L^2([0,1])$ iar $c_n = \int_0^1 f(t)\,\varphi_n(t)\mathrm{d}t$. Să se verifice că: $v_K(f) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n c_n\varphi_n$, seria fiind convergentă în $L^2([0,1])$.

c) Fie $\lambda\in\mathbf{C}$, $\lambda\neq\lambda_n$, $\forall n\in\mathbf{N}$. Să se arate că, pentru fiecare $f\in L^2([0, 1])$ există $g\in L^2([0,1])$, unic determinat de condiția: $\int_0^1 K(t, t')g(t)\mathrm{d}t - \lambda g(t') = f(t')$ a.p.t. pe $[0,1]$. g este dat de seria: $g = -\lambda^{-1}f + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\lambda^{-1}(\lambda_n - \lambda)^{-1}c_n\varphi_n$, convergentă în $L^2([0,1])$.

d) Dacă notăm $\varphi_{nn}(t, t') = \varphi_n(t)\,\overline{\varphi_n(t')}$ atunci $K = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\varphi_{nn}$, seria fiind convergentă în $L^2([0,1]\times[0,1])$.

B 14. Cu notațiile din exercițiul 13, să presupunem, în plus, că $K\in\mathcal{C}([0,1]\times[0,1])$

a) Să se verifice că $v_K : (L^2([0,1])) \to \mathcal{C}([0,1])$, iar v_K este continuu de la $L^2([0,1])$ la $\mathcal{C}([0,1])$.

b) Folosind punctul precedent să se verifice că $\lambda_n \neq 0 \Rightarrow \varphi_n$ continuă; iar dacă $f\in\mathcal{C}([0,1])$ atunci seria de la exercițiul 13 b) este uniform și absolut convergentă.

B 15. Fie X un spațiu Hilbert iar $T \in L(X)$ un operator autoadjunct.

a) Pentru orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ avem $\|P(T)\| = \sup \{|P(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

b) Există un omomorfism continuu de algebre cu unitate $\varphi: \mathcal{C}(\sigma(T)) \to L(X)$, unic determinat de condiția $\varphi(1_c) = T$. În cele ce urmează, vom nota $f(T)$ elementul $\varphi(f)$.

c) Dacă $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ atunci: $\|f(T)\| = \|f\|$; $f(T)^* = \bar{f}(T)$; $f(T)$ este operator normal.

B 16. Păstrăm notațiile din exercițiul 15. Dacă $\sigma(T) \subseteq [a, b]$ iar funcțiile $f: [a, b] \to [c, d]$ și $g: [c, d] \to \mathbf{C}$ sînt continue, atunci $g[f(T)]$ este definit și $g[f(T)] = (g \circ f)(T)$.

B 17. Cu notațiile din exercițiul 15, să se verifice că, dacă $f: \sigma(T) \to \mathbf{R}$ este continuă, atunci $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ („spectral mapping theorem") și $f(\sigma_p(T)) \subseteq \sigma_p(f(T))$.

A 18. Fie X un spațiu Hilbert de dimensiune infinită, $T \in L(X)$ operator compact autoadjunct și $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. Notațiile fiind cele din ex. 15, să se arate că $f(T)$ este compact dacă și numai dacă $f(0) = 0$.

A 19. Fie X un spațiu Hilbert, $\{e_i\}_{i \in I}$ o bază ortonormală în X, iar $T \in L(X)$ operatorul introdus în exercițiul VIII.44. Să se verifice că $f(T)$ este operatorul asociat familiei $\{f(\alpha_i)\}_{i \in I}$.

A 20. a) Pentru $f \in L^2([0,1])$ notăm $(Tf)(t) = t \cdot f(t)$. Să se verifice că $T \in L(L^2([0,1]))$.

b) Să se determine $\sigma(T)$ și $\sigma_p(T)$.

c) Oricare ar fi $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, să se verifice că: $f(T)(g)(t) = f(t)g(t)$, $\forall g \in L^2([0,1])$.

d) Luînd f aplicația constantă, să se determine $\sigma_p(f(T))$ și să se constate că incluziunea de la exercițiul 17 poate fi strictă.

A 21. Utilizînd exercițiul 15, să se verifice că următoarele condiții sînt echivalente pentru $T \in L(X)$:

a) T este autoadjunct și pozitiv.

b) $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$.

c) Există $S \in (X)$ autoadjunct astfel încît $T = S^2$.

d) Există $S \in L(X)$ astfel încît $T = SS^*$.

B 22. Fie X un spațiu Hilbert, iar $T \in L(X)$ autoadjunct. Cu notațiile din exercițiul 15, fie $f_1, f_2, f_3: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin: $f_1(t) = \sup(t, 0)$; $f_2(t) = -\inf(t, 0)$ și $f_3(t) = |t|$. Notăm $T^+ = f_1(T)$; $T^- = f_2(T)$; $|T| = f_3(T)$.

a) Să se arate că T^+, T^- și $|T|$ sînt operatori autoadjuncți pozitivi și că: $T = T^+ - T^-$, $|T| = T^+ + T^-$.

b) Dacă notăm P proiectorul pe subspațiul închis $\mathrm{Ker}(T^+)$ atunci au loc: $PT^+ = T^+P$; $PT^- = T^-P$; $PT = TP$; $P|T| = |T|P$; precum și relațiile analoge, în care P este înlocuit cu $(1_X - P)$.

b) Pentru orice $S \in L(X)$ autoajunct, avînd proprietatea că $ST = TS$, avem și $SP = PS$.

B 23. Cu ipotezele și notațiile din exercițiul 22, să se demonstreze că:

a) $|T|$ este cel mai mic operator autoadjunct S, cu proprietățile: $ST = TS$; $S \geqslant T$ și $S \geqslant -T$. Să se enunțe și să se demonstreze caracterizări analoge pentru T^+ și T^-.

b) Dacă $S, T \in L(X)$ sînt autoadjuncți, să se justifice notația $\inf(T, S) = 1/2(S + T + |S-T|)$, dacă se presupune că $ST = TS$.

B 24. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$ un operator autoadjunct. Să se arate că există cel mult o aplicație $\lambda \to P_\lambda$, definită pe mulțimea numerelor reale, cu proprietățile: $\alpha)$ $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, P_λ este proiector; $\beta)$ $\lambda < -\|T\| \Rightarrow P_\lambda = 0$; $\lambda > \|T\| \Rightarrow P_\lambda = 1_X$. $\gamma)$ $\lambda \leqslant \mu \Rightarrow P_\lambda \leqslant P_\mu$ $P_\lambda = \inf \{P_\mu | \mu > \lambda\}$. $\delta)$ $\forall n \in \mathbf{N}$ și $x, y \in X$, are loc egalitatea: $\langle T^n x, y\rangle = \int_{-\|T\|}^{\|T\|} \lambda^n \mathrm{d} \langle P_\lambda x, y\rangle$ *(integrală Riemann-Stieltjes)*.

B 25. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$ operator autoadjunct. Scopul acestui exercițiu este demonstrarea existenței aplicației $\lambda \to P_\lambda$, a cărei unicitate a fost arătată în exercițiul 24.

a) Fie $T_\lambda = \lambda 1_X + T$. Să se verifice că $\lambda \leqslant \mu \Rightarrow T_\lambda^+ \geqslant T_\mu^+$; iar $T_{\|T\|}^+ = 0$.

b) Notînd P_λ proiectorul pe $\mathrm{Ker}(T_\lambda^+)$, să se arate că $\lambda \to P_\lambda$ verifică $\alpha)$ și $\beta)$ de la exercițiul 14.

c) Dacă $\lambda < \mu$, atunci $\lambda(P_\mu - P_\lambda) \leqslant T(P_\mu - P_\lambda) \leqslant \mu(P_\mu - P_\lambda)$.

d) Folosind punctul precedent, să se verifice relația: $\mathrm{Ker}\,(T_\lambda^+) = \bigcap_{\mu > \lambda} \mathrm{Ker}\,(T_\mu^+)$.

Să se deducă de aici că este îndeplinită și condiția $\gamma)$.

e) Fie $x \in X$ iar $\mu_0 \leqslant -\|T\| \leqslant \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \|T\| \leqslant \mu_n$. Să se arate că: $\sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1} \langle (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}) x, x\rangle \leqslant \langle Tx, y\rangle \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k \langle (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}) x, x\rangle$. Utilizînd această relație, să se arate că $\delta)$ are loc pentru $n = 1$. Apoi să se arate că $\delta)$ are loc pentru orice $n \in \mathbf{N}$. (Egalitatea $\delta)$, în condițiile în care $\alpha) - \gamma)$ sînt verificate, poartă numele de *descompunerea spectrală a operatorului* T).

B 26. Fie X un spațiu Hilbert, iar $T \in L(X)$ operator autoadjunct, compact. Dacă $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sînt valorile proprii ale lui T, să se arate că, oricare ar fi $x \in X$: $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (P_{\lambda_n} - P_{\lambda_{n-1}}) x$, notațiile fiind cele din exercițiul 25. Să se compare cu exercițiul 9.

+ 27. Singurele algebre Banach, care sînt corpuri, sînt $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ și corpul cuaternionilor *(teorema lui Frobenius)*.

A 28. Fie X o algebră normată. Să se arate că $X \times \mathbf{C}$ se poate organiza ca algebră normată cu unitate, astfel încît $x \to (x, 0)$ să fie homomorfism de algebre între X și $X \times \mathbf{C}$ este algebră Banach dacă și numai dacă X este algebră Banach.

A 29. Fie X o algebră Banach cu element unitate e.

a) $\|e\| \geqslant 1$.

b) Pentru fiecare $x \in X$ definim $U_x, V_x \in L(X)$ prin: $U_x(y) = xy$; $V_x(y) = yx$. Să se verifice că aplicațiile $x \to U_x$ și $x \to V_x$ sînt homomorfisme injective de algebre cu element unitate.

c) Să se verifice că, pentru orice $x, y, \in X$ avem $U_x V_y = V_y U_x$. Reciproc, dacă $T \in L(X)$ și $TV_y = V_y T$, $\forall y \in X$ atunci există $x \in X$ unic, astfel încît $T = U_x$.

d) Să notăm $\|x\|_1 = \|U_x\|$. Să se verifice că $\|\cdot\|_1$ este o normă pe X, echivalentă cu prima, față de care X este algebră Banach, iar $\|e\|_1 = 1$.

A 30. Fie X o algebră Banach. $x' \in X$ se numește *adversul* elementului $x \in X$ dacă: $xx' = x'x = x + x'$.

a) Să se arate că, dacă există, adversul unui element este unic.

b) Dacă X are unitate, atunci x are advers dacă $(e-x)^{-1}$ există; în acest caz $x' = -x(e-x)^{-1}$.

c) Orice $x \in X$ cu $\|x\| < 1$ are advers.

A 31. O algebră Banach X se numește C^* — algebră, dacă este definită o aplicație de la X în X, notată $x \to x^*$ și numită involuție, cu proprietățile: 1) $x^{**} = x$; 2) $(x + y)^* = x^* + y^*$. 3) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$. 4) $(xy)^* = y^* x^*$. 5) $\|x^* x\| = \|x\|^2$. a) Dacă X este spațiu Hilbert, atunci $L(X)$ se poate organiza ca o C^* — algebră necomutativă, cu element unitate.

b) Dacă K este un spațiu topologic compact, $\mathcal{C}(K)$ se poate organiza ca C^* — algebră comutativă, cu element unitate.

+ 32. Dacă X este o C^* — algebră comutativă, cu element unitate, atunci există un spațiu topologic compact K, astfel încît X să fie izometric izomorfă cu $\mathcal{C}(K)$.

+ 33. Fie X un spațiu Hilbert și $T \in L(X)$. Mulțimea $W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \mid \|x\| = 1\}$ se numește *rangul numeric* al operatorului T.

a) Să se arate că $W(T)$ este o parte convexă a lui C.

b) $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

c) Dacă T este normal atunci $co(\sigma(T)) = \overline{W(T)}$.

A 34. Dacă X este spațiu Hilbert, iar $U \in L(X)$ este operator unitar, atunci $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in C \mid |\lambda| = 1\}$.

A 35. Fie X spațiu Hilbert, $T \in L(X)$. Pentru fiecare $\lambda \in \partial\sigma(T)$ există un șir $\{x_n\}$ din X, astfel încît $\|x_n\| = 1$ și $(Tx_n - \lambda x_n) \to 0$.

A 36. Fie X algebră normată, iar $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ șiruri Cauchy în X. Să se arate că $\{x_n y_n\}$ este șir Cauchy în X.

A 37. Fie X algebră normată. Să se arate că există o algebră Banach $\widetilde{X}$ care conține o subalgebră X_0 densă în $\widetilde{X}$ și izometrică cu X. Orice algebră Banach cu aceste proprietăți este izometrică cu $\widetilde{X}$.

SOLUȚII

I. ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI TOPOLOGIE GENERALĂ

1. Fie $x \in X$ și $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ scrierea (unică) în baza $\mathcal{B}$. Definim $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_0(e_i)$. f este corect definită, suma fiind finită pentru fiecare $x \in X$. Prin definiție, oricare ar fi $e_i \in \mathcal{B}$, avem $f(e_i) = f_0(e_i)$, adică $f|_{\mathcal{B}} = f_0$. Dacă $y \in X$ și $\lambda \in K$, avem, dacă $y = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$: $x + y = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) e_i$ și $\lambda x = \sum_{i \in I} (\lambda\lambda_i) e_i$ pe baza unicității. Deci: $f(x+y) = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) f_0(e_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_0(e_i) + \sum_{i \in I} \mu_i f_0(e_i) = f(x) + f(y)$ și $f(\lambda x) = \sum_{i \in I} (\lambda\lambda_i) f_0(e_i) = \lambda(\sum_{i \in I} \lambda_i f_0(e_i)) = \lambda f(x)$, deci f este liniară. În sfîrșit, dacă $g: X \to Y$ este liniară și $g|_{\mathcal{B}} = f_0$, atunci, pentru orice $x \in X$ cu $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, avem: $g(x) = g(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i g(e_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_0(e_i) = f(x)$, ceea ce arată unicitatea lui f.

2. Fie $e_{i_1}^*, \ldots, e_{i_n}^*$ o familie finită oarecare, iar $\lambda_j \in K$ astfel încît: $\lambda_1 e_{i_1}^* + \ldots + \lambda_n e_{i_n}^* = 0$. În particular, $\lambda_1 e_{i_1}^*(e_{i_j}) + \ldots + \lambda_n e_{i_n}^*(e_{i_j}) = 0$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Ținînd seama de definiția lui e_i, primul membru se reduce la λ_j, ceea ce dovedește că familia considerată este liniar independentă.

3. Dacă $y \in X^a$ iar $\lambda \in K$, avem: $\varphi(x)(x^* + y^*) = (x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x) = \varphi(x)(x^*) + \varphi(x)(y^*)$ și $\varphi(x)(\lambda x^*) = (\lambda x^*)(x) = \lambda x^*(x) = \lambda\varphi(x)(x^*)$, ceea ce arată că $\varphi(x)$ este liniară, deci $\varphi(x) \in X^{aa}$. Fie $y \in X$ și $\lambda \in K$. Avem, oricare ar fi $x^* \in X^a$: $\varphi(x+y)(x^*) = x^*(x+y) = x^*(x) + x^*(y) = \varphi(x)(x^*) + \varphi(y)(x^*)$ și $\varphi(\lambda x)(x^*) = x^*(\lambda x) = \lambda x^*(x) = \lambda\varphi(x)(x^*)$, adică $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ și $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$, ceea ce arată că φ este liniară. Fie acum $x \in X$, astfel încît $\varphi(x) = 0$, deci $\varphi(x)(x^*) = 0$, $\forall x^* \in X^a$, adică: $x^*(x) = 0$, $\forall x^* \in X^a$. Dacă presupunem $x \neq 0$, există $\mathcal{B}$ bază în X, astfel încît $x \in \mathcal{B}$. Conform ex. 1, există $x_0^* \in X^a$ astfel încît $x_0^*(x) = 1$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci φ este injectivă.

4. Fie $f, g \in A^0$ și $\lambda \in K$. Pentru orice $a \in A$, avem: $(f+g)(a) = f(a) + g(a) = 0$, $(\lambda f)(a) = \lambda f(a) = 0$, ceea ce arată că A^0 este subspațiu liniar. Oricare ar fi $a \in A$ și $f \in A^0$, avem $f(a) = 0$, ceea ce arată că $A \subseteq {}^0(A^0)$. Deoarece ${}^0(A^0)$ este subspațiu liniar, urmează $\mathcal{J}(A) \subseteq {}^0(A^0)$. Fie $x \in X$ cu $x \notin \mathcal{J}(A)$. Arătăm că $x \notin {}^0(A^0)$. Fie $\mathcal{B}_0$ o bază algebrică în $\mathcal{J}(A)$. Mulțimea $\mathcal{B}_0 \cup \{x\}$ este liniar independentă: în adevăr, dacă $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{B}_0$ și $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \lambda x = 0$, atunci $\lambda \neq 0$, căci $\mathcal{B}_0$ este liniar independentă; dar atunci ar urma $x \in \mathcal{J}(A)$, contradicție. Deci există o bază algebrică $\mathcal{B}$ în X, astfel încît $\mathcal{B}_0 \cup \{x\} \subseteq \mathcal{B}$. Cu ex. 1 putem defini $f \in X^a$ astfel încît $f(e_i) = 0$, $\forall e_i \in \mathcal{B} \setminus \{x\}$ și $f(x) = 1$. Deducem $f(y) = 0$, $\forall y \in \mathcal{J}(A)$. Deoarece $A \subseteq \mathcal{J}(A)$, rezultă $f \in A^0$. Însă $f(x) = 1$ arată că $x \notin {}^0(A^0)$.

5. a) Oricare ar fi $X' \subseteq X$ subspațiu liniar, $\varphi(X')$ este subspațiu liniar în X/X_1. Oricare ar fi $Y' \subseteq X/X_1$ subspațiu liniar, $\varphi^{-1}(Y')$ este subspațiu

liniar în X și, în plus, $X_1 \subseteq \varphi^{-1}(Y')$. Fie $X' \subseteq X$ un subspațiu cu $X_1 \subseteq X'$. Vom arăta că $\varphi^{-1}[\varphi(X')] = X'$. Incluziunea $X' \subseteq \varphi^{-1}[\varphi(X')]$ are loc întotdeauna. Reciproc, dacă $x \in \varphi^{-1}[\varphi(X')]$, urmează $\varphi(x) \in \varphi(X')$, deci există $y \in X'$ astfel încît $\varphi(x) = y + X_1$, adică $\varphi(x-y) = 0$, deci $x - y \in X_1$. Dar $X_1 \subseteq X'$ prin ipoteză, deci $x \in X'$. Fie acum $Y' \subseteq X/X_1$ subspațiu liniar. Să arătăm că $\varphi(\varphi^{-1}(Y')) = Y'$. Fie $y \in Y'$; deoarece φ este surjectivă, există $x \in X$ astfel încît $\varphi(x) = y$. Deci $x \in \varphi^{-1}(Y')$, de unde $Y' \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(Y'))$. Invers, dacă $y \in \varphi(\varphi^{-1}(Y'))$, deducem că există $x \in \varphi^{-1}(Y')$ astfel încît $\varphi(x) = y$. Dar $x \in \varphi^{-1}(Y')$ înseamnă că $\varphi(x) \in Y'$, deci $y \in Y'$. Cu acestea, φ stabilește o bijecție între subspațiile liniare ale lui X, care conțin X_1, și subspațiile liniare din X/X_1. Deoarece $X' \subseteq X''$ implică $\varphi(X') \subseteq \varphi(X'')$, urmează că φ conservă ordinea. b) Fie $x \neq 0$, deci există $f \in X^a$ astfel încît $f(x) = 1$. Ker f este subspațiu liniar maximal iar $x \notin \operatorname{Ker} f$, deci x nu aparține intersecției considerate. Fie acum $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar, $\varphi: X \to X/X_1$ surjecția canonică. În X/X_1 intersecția tuturor subspațiilor liniare maximale este $\{0\}$. Ținînd seama de a), subspațiile liniare maximale din X/X_1 sînt în bijecție cu subspațiile liniare maximale din X, care conțin X_1, de unde a doua afirmație.

6. Avem $X_1^0 \neq \{0\}^0$; dacă nu, ar urma $X = \{0\}^0 = {}^0(X_1^0) = X_1$, contradicție. Dacă $\dim X_1^0 \geqslant 2$, fie $f, g \in X_1^0$ două elemente liniar independente. $\{f\}^0$ este subspațiu liniar în X. Deoarece $f \neq 0$, avem ${}^0\{f\} \neq X$. Deoarece f, g sînt liniar independente, avem $X_1 \subseteq {}^0\{f\}$, ceea ce contrazice maximalitatea lui X_1. Deci $\dim X_1^0 = 1$. Fie $f \in X_1^0 \setminus \{0\}$. Din cele de mai sus, ${}^0\{f\} = X_1$, adică $X_1 = \{x \in X \mid f(x) = 0\} = \operatorname{Ker} f$. Dacă $f \in X^a \setminus \{0\}$ atunci ${}^0\{K f\} = \{x \in X \mid kf(x) = 0,\ \forall k \in K\} = \{x \in X \mid f(x) = 0\} = \operatorname{Ker} f$. Să demonstrăm rezultatele din § 1.37. Fie deci $f \in X^a \setminus \{0\}$. Avem $\operatorname{Ker} f = {}^0\{Kf\}$, deci $\operatorname{Ker} f \neq X$, căci $f \neq 0$. Dacă $\operatorname{Ker} f$ nu ar fi maximal, ar exista $X_1 \subseteq X$, subspațiu liniar, astfel încît $\operatorname{Ker} f \not\subseteq X_1$. Obținem $[\operatorname{Ker} f]^0 \supseteq X_1^0 \supseteq \{0\}$. Dar $[\operatorname{Ker} f]^0 = K$. f este subspațiu liniar de dimensiune 1, iar relația de mai sus este contradictorie. Fie $X_0 \subseteq X$ subspațiu liniar maximal. Pentru fiecare $f \in X_0^0 \setminus \{0\}$ avem $\operatorname{Ker} f = X_0$. În plus, deoarece X_0^0 este de dimensiune 1, urmează că $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$ implică proporționalitatea lui f_1 cu f_2.

7. a) $\varphi_x \in L_a(K, X)$, deoarece: $\varphi_x(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x = \varphi_x(\lambda) + \varphi_x(\mu)$, $\varphi_x(\alpha\lambda) = (\alpha\lambda)\, x = \alpha(\lambda x) = \alpha\varphi_x(\lambda)$. Aplicația $x \to \varphi_x$ este liniară: $\varphi_{x+y}(\lambda) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = \varphi_x(\lambda) + \varphi_y(\lambda)$, $\forall \lambda \in K$ și $\varphi_{\alpha x}(\lambda) = (\alpha\lambda)\,(x) = \alpha(\lambda x) = \alpha\varphi_x(\lambda)$, $\forall \lambda \in K$. Dacă $\varphi_x = 0$, înseamnă că $\lambda x = 0$, $\forall \lambda \in K$. În particular, pentru $\lambda = 1$ rezultă $x = 0$, deci $x \to \varphi_x$ este injectivă. Fie $f \in L_a(K, X)$ și $x = f(1)$. Avem $\varphi_x(\lambda) = \lambda x = \lambda f(1) = f(\lambda)$, $\forall \lambda \in K$, deci $x \to \varphi_x$ este surjectivă. b) Rezultă prin recurență din exercițiul 9 și a).

8. Conform exercițiului 4, avem: $X_1 = \mathcal{J}(X_1) = {}^0(X_2^0) = {}^0(X_2^0) = \mathcal{J}(X_2) = X_2$.

9. Este evident că $T_1 \in L_a(X_1, Y)$ și $T_2 \in L_a(X_2, Y)$, deci φ este bine definită. Dacă $S \in L_a(X_1 \oplus X_2, Y)$ atunci $(T + S)\,(x, 0) = T\,(x, 0) + S\,(x, 0)$ și $(T + S)\,(0, x) = T(0, x) + S(0, x)$ deci $\varphi(T + S) = \varphi(T) + \varphi(S)$. Analog, $\varphi(\lambda T) = \lambda\varphi(T)$, ceea ce arată că φ este liniară. Pentru ultimele două chestiuni, să definim $\psi: L_a(X_1, Y) \oplus L_a(X_2, Y) \to L_a(X_1 \oplus X_2, Y)$ prin $\psi(T_1, T_2) = T$, unde $T: X_1 \oplus X_2 \to Y$ este definit prin $T(x_1, x_2) = T_1(x_1) + T_2(x_2)$. Deoarece $T(x_1, 0) = T_1(x_1)$ și $T(0, x_2) = T_2(x_2)$, rezultă că $\varphi(\psi(T_1, T_2)) = (T_1, T_2)$. Apoi, dacă $T \in L_a(X_1 \oplus X_2, Y)$, avem $T(x_1, x_2) = T(x_1, 0) + T(0, x_2)$, ceea ce arată că $\psi(\varphi(T)) = T$. Deducem că φ este bijectivă și admite ca inversă pe ψ.

10. Fie $\mathcal{A}$ mulțimea perechilor (U, V) cu proprietățile: $U, V \subseteq X$ sînt convexe; $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ și $U \cap V = \emptyset$. Evident, $(A, B) \in \mathcal{A}$, deci $\mathcal{A}$ nu

este vidă. Ordonăm mulțimea $\mathcal{A}$ astfel: $(U, V) \prec (U_1, V_1)$ dacă $U \subseteq U_1$ și $V \subseteq V_1$. Aplicînd lema lui Zorn, fie $\{(U_i, V_i)_{i \in I}$ un lanț maximal în $\mathcal{A}$ și să notăm $C = \bigcup_{i \in I} U_i$, $D = \bigcup_{i \in I} V_i$. C, D sînt convexe, deoarece avem un lanț. Apoi, evident, $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ și $C \cap D = \emptyset$. Dacă ar exista $x_0 \notin C \cup D$, vom arăta că: fie $C \cap co\,(x_0 \cup D) = \emptyset$, fie $co\,(x_0 \cup C) \cap D = \emptyset$, ceea ce ar contrazice maximalitatea lanțului ales. Raționăm prin reducere la absurd: dacă am avea simultan $C \cap co\,(x_0 \cup D) \neq \emptyset$ și $co\,(x_0 \cup C) \cap D \neq \emptyset$, ar exista $\lambda, \mu \in (0,1)$ astfel încît $\lambda x_0 + (1 - \lambda)\, d = c$ și $\mu x_0 + (1 - \mu)\, c' = d'$, unde $c, c' \in C$ și $d, d' \in D$. Deducem $\lambda^{-1} c + (\mu^{-1} - 1)\, c' = \mu^{-1} d' + (\lambda^{-1} - 1)\, d$. Dacă notăm $\gamma = \lambda^{-1} + \mu^{-1} - 1$, avem $\gamma > 0$, iar relația precedentă devine: $\gamma^{-1} \lambda^{-1} c + \gamma^{-1}(\mu^{-1} - 1) c' = \gamma^{-1} \mu^{-1} d' + \gamma^{-1}(\lambda^{-1} - 1)\, d$, de unde ar urma $C \cap D \neq \emptyset$. contradicție.

11. a) Dacă $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ atunci $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$, ceea ce arată că $T(\lambda x + \mu y) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} (\lambda x_i + \mu y_i) \right) f_j = \lambda \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \right) f_j + \mu \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} y_i \right) f_j = \lambda T x + \mu T y$, deci T este o aplicație liniară. b) Deoarece $Te_i \in Y$, există $\alpha_{ij} \in K$ astfel încît: $Te_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Să arătăm că T acționează după formula dată în enunț. Fie deci $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Datorită liniarității lui T, putem scrie: $Tx = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i Te_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i \right) f_j$. Invers, dacă T satisface relația din enunț, înlocuind $x = e_i$, avem în mod necesar: $Te_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} f_j$, $\forall i = 1, \ldots, n$, ceea ce arată unicitatea coeficienților α_{ij}.

12. a) rezultă din $X \in \mathcal{V}_\tau(x)$, $\forall x \in X$. β) rezultă din definiție. γ) Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x)$, înseamnă că există $D_1, D_2 \in \tau$ încît $x \in D_1 \subseteq V_1$ și $x \in D_2 \subseteq V_2$, de unde $x \in D_1 \cap D_2 \subseteq V_1 \cap V_2$, adică $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_\tau(x)$. δ) Dacă $x \in D \subseteq V$ și $D \in \tau$, evident, $x \in D \subseteq W$ și $D \in \tau$, adică $W \in \mathcal{V}_\tau(x)$. ε) Fie $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$ și $D \in \tau$, încît $x \in D \subseteq V$. Dacă alegem $W = D$, avem $W \in \mathcal{V}_\tau(x)$, căci $x \in D \subseteq D = W$. Dacă $y \in W$, avem $y \in D \subseteq V$, adică $V \in \mathcal{V}_\tau(y)$.

13. $\emptyset \in \tau_V$ prin construcție. Conform proprietății α), $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, deci folosind δ), deducem $X \in \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in X$, adică $X \in \tau_V$. Dacă $D_1, D_2 \in \tau_V$ atunci: fie $D_1 \cap D_2 = \emptyset$; fie $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ în care caz, pentru fiecare $x \in D_1 \cap D_2$, avem $D_1 \in \mathcal{V}(x)$ și $D_2 \in \mathcal{V}(x)$. Din γ) deducem $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{V}(x)$, deci $D_1 \cap D \in \tau_V$. În sfîrșit, dacă $D_i \in \tau_V$ și $x \in \bigcup_{i \in I} D_i$, există $i_0 \in I$ încît $x \in D_{i_0}$, deci $D_{i_0} \in \mathcal{V}(x)$. Din δ) deducem $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{V}(x)$, adică $\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau_V$.

14. a) Fie $D \in \tau$. Dacă $D = \emptyset$, avem $D \in \tau_V$. Dacă nu, fie $x \in D$. Deoarece $x \in D \subseteq D$ și $D \in \tau$, rezultă $D \in \mathcal{V}_\tau(x)$, deci $D \in \tau_V$. Reciproc, fie $D \in \tau_V$. Dacă $D = \emptyset$, avem $D \in \tau$. Dacă nu, înseamnă că $D \in \mathcal{V}_\tau(x)$, $\forall x \in D$. Din definiția lui $\mathcal{V}_\tau(x)$ există $D_x \in \tau$ încît $x \in D_x \subseteq D$. Avem deci $\bigcup_{x \in D} D_x \subseteq D$ și $D \subseteq \bigcup_{x \in D} D_x$, adică $D = \bigcup_{x \in D} D_x \in \tau$. b) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$ și să notăm $D = \{y \in V \mid V \in \mathcal{V}(y)\}$.

Avem, evident, $x \in D$ și $D \subseteq V$. Să mai arătăm că $D \in \tau_V$, ceea ce va implica $V \in \mathcal{V}_{\tau_V}(x)$. Oricare ar fi $y \in D$, avem $V \in \mathcal{V}(y)$, deci, conform ε), găsim $W \in \mathcal{V}(y)$, încît $V \in \mathcal{V}(z)$, $\forall z \in W$. Din definiția lui D rezultă atunci $z \in D$, adică $W \subseteq D$. Conform δ), urmează $D \in \mathcal{V}(y)$, adică $D \in \tau_V$. Reciproc, fie $V \in \mathcal{V}_{\tau_V}(x)$; deci există $D \in \tau_V$ astfel încît $x \in D \subseteq V$. Din definiția lui τ_V deducem $D \in \mathcal{V}(x)$, deci din δ) avem $V \in \mathcal{V}(x)$.

15. Combinînd 1) cu δ), rezultă că, pentru orice $V \subseteq X$, cu proprietatea că există $U \in \mathcal{U}(x)$ cu $U \subseteq V$, avem $V \in \mathcal{V}(x)$. Ținînd seama de 2), urmează că orice $V \in \mathcal{V}(x)$ are această proprietate, de unde unicitatea lui $\mathcal{V}(x)$ și: $\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X \mid \exists U \in \mathcal{U}(x)$ cu $U \subseteq V\}$. Să arătăm că $\mathcal{V}(x)$ astfel construit are proprietățile α) — ε) și 1), 2). α) rezultă din α'). β) rezultă din β'). Pentru γ), fie V_1, $V_2 \in \mathcal{V}(x)$ iar $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ încît $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$. Din γ') există $U \in \mathcal{U}(x)$ încît $U \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq V_1 \cap V_2$, ceea ce arată că $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$. Dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ și $V \subseteq W$, iar $U \in \mathcal{U}(x)$ satisface $U \subseteq V$, avem $U \subseteq W$, deci $W \in \mathcal{V}(x)$. În sfîrșit, fie $V \in \mathcal{V}(x)$, $U \in \mathcal{U}(x)$ cu $U \subseteq V$, iar $W \in \mathcal{U}(x)$ ca în δ'). Deci $\forall y \in W$, $\exists W_1 \in \mathcal{U}(y)$ încît $W_1 \subseteq U$. Atunci $W_1 \subseteq V$, ceea ce dovedește că $V \in \mathcal{V}(y)$, adică ε). Proprietățile 1) și 2) au loc datorită construcției lui $\mathcal{V}(x)$.

16. a) $F \subseteq X$ este închisă $\Leftrightarrow \complement F \in \tau \Leftrightarrow (\complement F = \emptyset$ sau $\complement F = X) \Leftrightarrow (F = X$ sau $F = \emptyset)$. Dacă A este nevidă, $\bar{A}$ este închisă și nevidă, deci $\bar{A} = X$. Dacă $A \neq X$, $\overset{\circ}{A}$ este deschisă și diferită de X, deci $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Fie x, $x_n \in X$. Singura vecinătate a lui x este X, deci $\mathcal{V}(x) = \{X\}$. În particular, $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbf{N}$, deci $x_n \to x$. Dacă $f: Y \to X$: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ și $f^{-1}(X) = Y$, ceea ce dovedește continuitatea lui f. Dacă $A \subseteq X$, singura acoperire cu mulțimi deschise pentru A este $\{\emptyset, X\}$, deci finită, ceea ce dovedește quasi-compacitatea lui A. (X, τ) nu este separat, căci singura vecinătate a oricărui punct este X. b) $F \subseteq X$ este închisă $\Leftrightarrow \complement F \in \tau = \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow F \in \mathcal{P}(X)$, deci orice parte a lui X este închisă. Fie $x_n \in X$ și să presupunem că $x_n \to x$. $\{x\}$ fiind mulțime deschisă, există $n_0 \in \mathbf{N}$, astfel încît $x_n = x$, $\forall n \geqslant n_0$. Reciproca este valabilă în orice spațiu topologic. Orice vecinătate a lui x conține x, deci: $\mathcal{V}(x) \subseteq \{V \subseteq X \mid x \in V\}$. Reciproc, avem $x \in \{x\} \subseteq V$ iar $\{x\} \in \tau$, ceea ce arată că $V \in \mathcal{V}(x)$. Apoi $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ și, oricare ar fi V din $\mathcal{V}(x)$, avem $\{x\} \in V$, deci $\mathcal{U}(x) = \{\{x\}\}$ este sistem fundamental de vecinătăți ale lui x. Dacă $f: X \to Y$ și $D \in \tau$, atunci $f^{-1}(D) \in \mathcal{P}(X)$, deci f este continuă. Fie $x \neq y$. Avem $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$. iar $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ deci X este separat. Fie $A \subseteq X$ mulțime compactă, $A = \{x_i \mid i \in I\}$. Avem $\{x_i\} \in \tau$, $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$. Pentru ca din această acoperire să se poată extrage o subacoperire finită este necesar și suficient ca A să fie finită.

17. Avem, evident, $F_{n+1} \subseteq F_n$, deci, dacă $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$, atunci $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \ldots \cap F_{n_k} = F_{n_k} \neq \emptyset$, deci $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Fie $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Definim prin recurență un subșir $\{x_{n_k}\}$ astfel: $x_{n_1} \in S(x, 1)$; dacă x_{n_k} a fost ales, există $n_{k+1} > n_k$ astfel încît $x_{n_{k+1}} \in S(x, (k+1)^{-1})$, deoarece $x \in F_{n_k}$, adică $S(x, (k+1)^{-1}) \cap \cap \{x_{n_{k+1}}, \ldots\} \neq \emptyset$. Deoarece $\rho(x_{n_k}, x) < k^{-1}$, $\forall k \in \mathbf{N}$, rezultă că $x_{n_k} \to x$.

18. Dacă $A, A' \in \mathcal{B}$, avem $A = \prod_{i \in I} A_i$ și $A' = \prod_{i \in I} A_i'$ de unde: $A \cap A' = \prod_{i \in I} (A_i \cap A_i') \in \mathcal{B}$, ceea ce arată că $\mathcal{B}$ este bază pentru o topologie τ pe $\prod_{i \in I} X_i$. Deoarece avem $\mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) = \prod_{i \in I} A_i$, unde $A_i = X_i$, $\forall i \neq i_0$, re-

zultă că pr_i sînt aplicații continue. Fie τ_1 o topologie pe X, astfel încît $\mathrm{pr}_i: (X, \tau_1) \to (X_i, \tau_i)$ sînt continue. Rezultă că mulțimile de forma $\prod_{i \in I} A_i$, cu $A_i = X_i$, $\forall i \neq i_0$ și $A_{i_0} \in \tau_{i_0}$ sînt în τ_1. Luînd intersecții finite, deducem $\mathcal{B} \subseteq \tau_1$, deci $\tau \subseteq \tau_1$.

19. Dacă (X, τ) este compact, fiecare (X_i, τ_i) este separat. În adevăr, dacă $x \neq y \in X_i$, atunci $\mathrm{pr}_i^{-1}(x)$ și $\mathrm{pr}_i^{-1}(y)$ sînt mulțimi închise și disjuncte în X. Există vecinătăți deschise și disjuncte A, B pentru aceste mulțimi. dr_i fiind aplicații deschise, $\mathrm{pr}_i(A)$ și $\mathrm{pr}_i(B)$ sînt deci vecinătăți deschise disjuncte pentru cele două puncte. pr_i fiind aplicații continue și surjective, rezultă că (X_i, τ_i) sînt spații compacte.

Să considerăm pentru început cazul a două spații metrizabile, compacte X și Y. Fie $(x_n, y_n) \in X \times Y$ un șir oarecare. Șirul $x_n \in X$ conține un subșir convergent $x_{n_k} \to x$ în X. Subșirul (y_{n_k}) conține un subșir $y_{n_{k_l}} \to y$ în Y. Șirul $(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})$ este convergent deci în $X \times Y$ la (x, y). Folosind metoda șirului diagonal, raționamentul de mai sus se extinde la cazul unui produs numărabil de spații metrizabile compacte.

Corespunzător diverselor caracterizări ale compacității, există diferite demonstrații ale afirmației generale. Cea mai scurtă pare a fi cea din [3], folosind ultrafiltrele. Toate demonstrațiile cunoscute fac apel la axioma alegerii.

20. K_n este mulțime mărginită, deoarece $d(x, 0) \leqslant n$, $\forall x \in K_n$. Dacă $x \in K_n$, există $x_k \in K_n$ încît $x_k \to x$. Deducem $d(x_k, 0) \leqslant n$ și $d(x_k, \complement A) \geqslant n^{-1}$, deci din continuitatea funcției distanță: $d(x, 0) \leqslant n$ și $d(x, \complement A) \geqslant n^{-1}$, adică $x \in K_n$. Rezultă că K_n este compact, fiind mărginit și închis. Incluziunea $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq A$ este evidentă. Fie deci $x \in A$. Există $n_1 \in \mathbf{N}$ astfel încît $d(x, 0) \leqslant n_1$. Deoarece $\complement A$ este închisă, există $n_2 \in \mathbf{N}$ astfel încît $d(x, \complement A) \geqslant n_2^{-1}$. Notînd $n = \max\{n_1, n_2\}$, avem $x \in K_n$. Mulțimea $\{x \in A \mid d(x, 0) < n + 1, d(x, \complement A) > (n+1)^{-1}\}$ este deschisă și inclusă în K_{n+1}, ceea ce dovedește incluziunea $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Fie $K \subseteq A$ compact. Utilizînd cele de mai sus, $K \subseteq A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_n$. Există deci o subacoperire finită $K \subseteq \bigcup_{p=1}^{m} K_{n_p}$. Dacă $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$, avem $K \subseteq K_{n_0}$ (conform fig. 1).

21. a) ρ este bine definită, deoarece seria este convergentă. $\rho((x_n), (y_n)) = 0$ dacă și numai dacă $\rho_n(x_n, y_n) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, adică dacă și numai dacă $(x_n) = (y_n)$. Simetria este evidentă. Inegalitatea triunghiului rezultă imediat din formula: $\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ $(a, b \geqslant 0)$, care se verifică prin calcul direct. Să arătăm că ρ induce topologia produs. Fie $(x_n^0) \in X$ și V o vecinătate a lui (x_n^0) în topologia produs. Există deci n_0 și $\delta > 0$ astfel încît $\prod_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq V$, unde $V_n = X_n$ dacă $n \geqslant n_0$ și $V_n = \{x \in X_n \mid \rho_n(x, x_n^0) < \delta\}$, pentru $n < n_0$. Notînd $\varepsilon = \delta 2^{-n_0-2}$ avem $S((x_n^0), \varepsilon) \subseteq V$. În adevăr, dacă

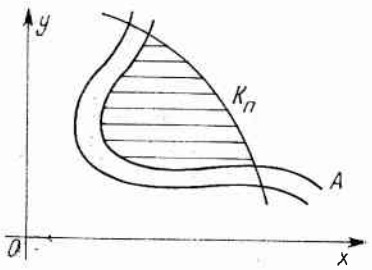

Fig. 1

$\rho((x_n), (x_n^0)) < \varepsilon$, urmează: $\dfrac{\rho_n(x_n, x_n^0)}{1+\rho_n(x_n, x_n^0)} < \varepsilon 2^n$, de unde, dacă $n < n_0$: $\rho_n(x_n, x_n^0) < \delta$, ceea ce arată că $(x_n) \in V$. Reciproc, fie $\varepsilon > 0$ și să notăm $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $2^{-n_0+2} < \varepsilon$. Fie $\delta = \varepsilon/2n_0$ și $V_n \subseteq X_n$ mulțimile definite astfel: $V_n = X_n$ dacă $n \geqslant n_0$ și $V_n = \{x_n | \rho_n(x_n, x_n^0) < \delta\}$, pentru $n < n_0$. Să arătăm că $\prod_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq S((x_n^0), \varepsilon)$ Dacă $\rho_n(x_n, x_n^0) < \delta$ pentru $n < n_0$, urmează: $\sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} \dfrac{\rho_n(x_n, x_n^0)}{1+\rho_n(x_n, x_n^0)} < n_0\delta = \dfrac{1}{2}\varepsilon$. Apoi: $\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} \dfrac{\rho_n(x_n, x_n^0)}{1+\rho_n(x_n, x_n^0)} \leqslant$ $\leqslant 2^{-n_0+1} < \dfrac{1}{2}\varepsilon$, ceea ce arată că $\rho((x_n)(x_n^0)) < \varepsilon$. b) După cum rezultă imediat din cele de mai sus, un șir $x^k = (x_n^k) \in X$ este convergent la $(x_n^0) \in X$ (respectiv este șir Cauchy în X) dacă și numai dacă $x_n^k \in X_n$ este convergent la x_n^0 în X_n (respectiv este șir Cauchy în X_n), $\forall n \in \mathbf{N}$. Această observație demonstrează echivalența din enunț.

II. PRELUNGIREA FUNCȚIONALELOR LINIARE

1. Dacă $x, y \in m$ și $\lambda \geqslant 0$, avem: $p(x+y) = \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n +$ $+ \limsup_{n\to\infty} y_n = p(x) + p(y)$; $p(\lambda x) = \limsup_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda \limsup_{n\to\infty} x_n = \lambda p(x)$. p nu este seminormă: notînd $x = (1,..., 1,...)$, avem $p(-x) = -p(x)$. p nu este funcțională liniară: notînd $x = (1, -1,...,1, -1,...)$, avem $p(-x) = p(x)$.

2. $\mathcal{B}$ fiind bază algebrică, coeficienții λ_i sînt unic determinați și sînt nuli, cu excepția unui număr finit, deci p este bine definit. Dacă $x, y \in X$ și $\lambda \in \Gamma$ iar $x = \sum_{x_i \in \mathcal{B}} \lambda_i x_i$, $y = \sum_{x_i \in \mathcal{B}} \mu_i x_i$ atunci: $x + y = \sum_{x_i \in \mathcal{B}} (\lambda_i + \mu_i) x_i$; $\lambda x = \sum_{x_i \in \mathcal{B}} (\lambda\lambda_i) x_i$. Din unicitatea dezvoltării după o bază, rezultă că $p(x + y) = \sum_{x_i \in \mathcal{B}_0} |\lambda_i + \mu_i| \leqslant$ $\leqslant \sum_{x_i \in \mathcal{B}_0} |\lambda_i| + \sum_{x_i \in \mathcal{B}_0} |\mu_i| = p(x) + p(y)$; $p(\lambda x) = \sum_{x_i \in \mathcal{B}_0} |\lambda\lambda_i| = |\lambda| \sum_{x_i \in \mathcal{B}_0} |\lambda_i| = |\lambda| p(x)$. În sfîrșit, avem echivalențele: (p este normă) $\Leftrightarrow$ ($p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ($\sum_{x_i \in \mathcal{B}_0} |\lambda_i| = 0 \Rightarrow x = 0$) $\Leftrightarrow$ ($\lambda_i = 0$, $\forall x_i \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow x = 0$) $\Leftrightarrow \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$. Ultima implicație rezultă astfel: presupunînd prin absurd că $\mathcal{B}_0 \nsubseteq \mathcal{B}$, rezultă că există $x_{i_0} \in \mathcal{B}$ și $x_{i_0} \notin \mathcal{B}_0$. Avem atunci $x_{i_0} \neq 0$, în timp ce $\lambda_i = 0, \forall x_i \in \mathcal{B}_0$.

3. a) Fie $x, y \in \mathrm{Ker}\, p$, $\lambda, \mu \in \Gamma$. Avem: $0 \leqslant p(\lambda x + \mu y) \leqslant |\lambda| p(x) +$ $+ |\mu| p(y) = 0$, de unde $p(\lambda x + \mu y) = 0$, adică $\lambda x + \mu y \in \mathrm{Ker}\, p$. b) $\widehat{p}$ este bine definită: dacă $x' - x \in \mathrm{Ker}\, p$, atunci $0 \leqslant |p(x) - p(x')| \leqslant p(x - x') = 0$. Dacă $\widehat{p}(x + \mathrm{Ker}\, p) = 0$, urmează $p(x) = 0$, deci $x \in \mathrm{Ker}\, p$, adică $x + \mathrm{Ker}\, p = 0$ în $X/\mathrm{Ker}\, p$. Restul proprietăților lui $\widehat{p}$ rezultă din faptul că p este semi-

normă. c) Ker p este subspațiu liniar în $\mathbf{R}$; p fiind neidentic nulă, Ker $p \neq \mathbf{R}$. Singura posibilitate este Ker $p = \{0\}$, ceea ce arată că p este normă.

4. a) Dacă p este funcțională convexă, atunci în mod necesar: $0 = p(0) \leqslant p(1) + p(-1) = \alpha - \beta$, adică $\beta \leqslant \alpha$. Reciproc, dacă această condiție este îndeplinită, pentru orice $\lambda \geqslant 0$ avem: $p(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda p(x)$ dacă $x \geqslant 0$ și $p(\lambda x) = \beta(\lambda x) = \lambda(\beta x) = \lambda p(x)$ dacă $x < 0$. Apoi: $p(x + y) = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = p(x) + p(y)$ dacă $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$; $p(x + y) = \beta(x + y) = \beta x + \beta y = p(x) + p(y)$ dacă $x < 0$ și $y < 0$; dacă $x \geqslant 0$, $y < 0$ și $x + y \geqslant 0$, atunci: $p(x + y) = \alpha(x + y) \leqslant \alpha x + \beta y = p(x) + p(y)$. Dacă $x \geqslant 0$, $y < 0$ și $x + y < 0$ atunci $p(x + y) = \beta(x + y) \leqslant \alpha x + \beta y = p(x) + p(y)$. Deci p este funcțională convexă. Dacă p este seminormă atunci $\alpha = p(1) = p(-1) = -\beta$. Reciproc, să presupunem că $\alpha = -\beta \geqslant 0$. Atunci p este seminormă: dacă $\lambda < 0$ avem: $p(\lambda x) = \beta(\lambda x) = (-\alpha)(\lambda x) = (-\lambda)(\alpha x) = (-\lambda)p(x)$ dacă $x \geqslant 0$; și $p(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = (-\beta)(\lambda x) = (-\lambda)(\beta x) = (-\lambda)p(x)$ dacă $x < 0$. b) Fie $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcțională convexă și să notăm $\alpha = p(1)$, $\beta = -p(-1)$. Dacă $x \geqslant 0$ atunci $p(x) = p(x.1) = xp(1) = \alpha x$. Dacă $x < 0$ atunci $p(x) = p((-x)(-1)) = (-x)p(-1) = \beta x$, deci p este de forma indicată. Dacă p este seminormă, atunci în mod necesar: $p(x) = \alpha |x|$, cu $\alpha \geqslant 0$, ceea ce implică rezultatul de la exercițiul 3c).

5. a) Dacă f, $g \in \mathcal{C}(X)$ și $\lambda \in \mathbf{R}$, avem: $p_K(f + g) = \sup_{x \in K} |(f + g)(x)| \leqslant \sup_{x \in K} (|f(x)| + |g(x)|) \leqslant \sup_{x \in K} |f(x)| + \sup_{x \in K} |g(x)| = p_K(f) + p_K(g)$, $p_K(\lambda f) = \sup_{x \in K} |(\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_{x \in K} |f(x)| = |\lambda| p_K(f)$. Dacă $X = K$ iar $p_K(f) = 0$, urmează $\sup_{x \in K} |f(x)| = 0$, $\forall x \in X$, adică $f = 0$ în $\mathcal{C}(X)$. Reciproc, să presupunem că X este complet regulat. Dacă $X \neq K$, există $x_0 \in X \setminus K$, deci există $f \in \mathcal{C}(X)$ astfel încît $f(x_0) = 1$ și $f(x) = 0$, $\forall x \in K$. Am avea $p_K(f) = 0$, dar $f \neq 0$, deci p_k nu ar fi normă.

6. Fie f, $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ și $\lambda \in \mathbf{R}$. Avem: $p_{K,n}(f + g) = \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leqslant n}} |D^k(f + g)(x)| \leqslant \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leqslant n}} |D^k f(x)| + \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leqslant n}} |D^k g(x)| = p_{K,n}(f) + p_{K,n}(g)$; $p_{K,n}(\lambda f) = \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leqslant n}} |D^k(\lambda f)(x)| = |\lambda| \sup_{\substack{x \in K \\ |k| \leqslant n}} |D^k f(x)| = |\lambda| p_{K,n}(f)$.

7. Fie $f, g \in \mathcal{L}^p[0,1]$ și $\lambda \in \mathbf{R}$. Utilizînd inegalitatea lui Minkowski, avem: $\left(\int_0^1 |(f+g)(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $\left(\int_0^1 |\lambda f(t)|^p dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^1 |\lambda|^p |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, deci avem o seminormă. Considerînd $f \in \mathcal{L}^p([0,1])$, definită prin $f(0) = 1$, $f(t) = 0$, $\forall t \in (0,1]$, avem $f \neq 0$, dar $\int_0^1 |f(t)|^p dt = 0$.

8. Fie $x, y \in X$ și $\lambda \in \Gamma$. Avem $q(x + y) = p(T(x + y)) = p(Tx + Ty) \leqslant p(Tx) + p(Ty) = q(x) + q(y)$ și $q(\lambda x) = p(T(\lambda x)) = p(\lambda Tx) = |\lambda| p(Tx) = |\lambda| q(x)$.

9. Fie $x, y \in X_1$ și $\lambda \in \mathbf{R}$. Avem: $0 = p(0) \leqslant p(x + y) + p[-(x + y)] \leqslant p(x) + p(-x) + p(-y) + p(y) = 0$ deci $x + y \in X_1$. Dacă $\lambda \geqslant 0$ atunci $p(\lambda x) + p(-\lambda x) = \lambda[p(x) + p(-x)] = 0$. Dacă $\lambda < 0$: $p(\lambda x) + p(-\lambda x) = (-\lambda)[p(-x) + p(x)] = 0$ deci $\lambda x \in X_1$. b) Teorema lui Hahn-Banach demonstrea-

ză existența lui F. Fie $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$. Avem: $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) = F(x_1) + f(x_2)$. Prin ipoteză $F(x_1) \leqslant p(x_1)$ și $-F(x_1) = F(-x_1) \leqslant p(-x_1), = -p(x_1)$, adică $F(x_1) = p(x_1)$, de unde $F(x_1 + x_2) = p(x_1) + f(x_2)$. Deoarece orice $x \in X$ se scrie unic $x = x_1 + x_2$, cu $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, deducem unicitatea lui F.

10. Fie $x, x' \in m$ și $\varepsilon > 0$. Există $\{p, n_1, \ldots, n_p\}$ și $\{q, m_1, \ldots, m_q\}$ astfel încît: $\limsup_{k\to\infty} p^{-1} \sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i} \leqslant q(x) + \varepsilon$ și $\limsup_{k\to\infty} q^{-1} \sum_{k=1}^{q} x'_{k+m_i} \leqslant q(x') + \varepsilon$. Însă:

$$q(x + x') \leqslant \limsup_{k\to\infty} (pq)^{-1} \sum_{i,j=1}^{p,q} (x + x')_{k+n_i+m_j} \leqslant \limsup_{k\to\infty} (pq)^{-1} \sum_{i,j=1}^{p,q} x_{k+n_i+m_j} +$$

$$+ \limsup_{k\to\infty} (pq)^{-1} \sum_{i,j=1}^{p,q} x'_{k+n_i+m_j} = q^{-1} \sum_{j=1}^{q} \limsup_{k\to\infty} p^{-1} \sum_{i=1}^{p} x_{(k+n_i)+m_j} +$$

$$+ p^{-1} \sum_{i=1}^{p} \limsup_{k\to\infty} q^{-1} \sum_{j=1}^{q} x'_{(k+m_j)+n_i} \leqslant \limsup_{k\to\infty} p^{-1} \sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i} + \limsup_{k\to\infty} q^{-1} \sum_{j=1}^{q} x'_{k+m_j} \leqslant$$

$\leqslant q(x) + q(x') + 2\varepsilon$. $\varepsilon > 0$ fiind oarecare, q rezultă funcțională convexă. Dacă $x = (1.., 1, ...)$ atunci $q(x) = 1$, ceea ce arată că q nu este identic nulă.

11. Din definiția lui $\mathcal{F}$ rezultă $\sup f(x) \leqslant p(x)$. Să fixăm $x_0 \in X$. Există deci $f_0 \in X^a$ astfel încît $f_0(x_0) = p(x_0)$ și $f_0(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$. Urmează $f_0 \in \mathcal{F}$, deci $\sup f(x_0) \geqslant f_0(x_0) = p(x_0)$, ceea ce demonstrează egalitatea. Cazul complex se tratează analog.

12. Dacă $p \in X^a$, este evident că p este funcțională convexă. Dacă $f \in X^a$ satisface $f(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$, deducem $-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = -p(x)$, deci $p = f$. Reciproc, fie $x_0 \in X$ și $f_0 \in X^a$, astfel încît $f_0(x_0) = p(x_0)$ și $f_0(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$. Prin ipoteză, f_0 este unic determinată de p, deci $p = f_0 \in X^a$.

13. a) Fie $g : X \to \Gamma^n$, definită prin $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$. Dacă notăm $X_0 = g(X)$, atunci $X_0 \subseteq \Gamma^n$ este subspațiu liniar. Definim $h : X_0 \to \Gamma$ astfel: fie $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X_0$ și $x \in X$ astfel încît $\xi_i = g_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$. Definim $h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = f(x)$. h este bine definită: dacă $y \in X$ satisface $g_i(y) = \xi_i$ $(i = \overline{1, n})$, rezultă $x - y \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} g_i \subseteq \operatorname{Ker} f$, deci $f(x) = f(y)$. Faptul că h este liniară este imediat. Fie atunci $H : \Gamma^n \to \Gamma$ o prelungire a lui h. Se știe că există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ încît $H(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$. În particular, pentru fiecare $x \in X$ avem $f(x) = h(g_1(x), \ldots, g_n(x)) = H(g_1(x), \ldots, g_n(x)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x)$.

b) Demonstrație prin inducție: Dacă $n = 1$, faptul că f_1 este liniar independentă înseamnă că există $x \neq 0$ astfel încît $f_1(x) \neq 0$. Atunci $x_1 = (f_1(x))^{-1}$ convine. Fie $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ funcționale liniar independente. Notăm $g_i = f_i \mid_{\operatorname{Ker} f_{n+1}} (i = \overline{1, n})$. Verificăm că g_i sînt liniar independente. Dacă nu ar fi, ar exista $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ încît: α_i nu sînt toți nuli și $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{Ker} f_{n+1}$. Să notăm $\alpha_{n+1} = (f_{n+1}(x_0))^{-1} \left(-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_0) \right)$, unde $x_0 \notin \operatorname{Ker} f_{n+1}$ este fixat. Atunci $\alpha_{n+1} f_{n+1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0$, $\forall x \in X$, ceea ce contrazice ipoteza. Conform ipotezei inductive, putem găsi deci $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{Ker} f_{n+1}$, astfel încît $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ pentru $i, j = \overline{1, n}$. Să mai arătăm că există x_{n+1}

astfel încît $f_1(x_{n+1}) = \ldots = f_n(x_{n+1}) = 0$ și $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$. Dacă nu, am avea, oricare ar fi $x \in X$: $f_i(x) = 0$, $\forall i = \overline{1, n} \Rightarrow f_{n+1}(x) = 0$. Conform a) f_{n+1} ar fi combinație liniară de $f_1, \ldots, f_n$, în contradicție cu liniara independență.

14. a) Dacă $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ și $\lambda \geqslant 0$ avem: $p((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = p(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = p_1(x_1 + y_1) + p_2(x_2 + y_2) \leqslant p_1(x_1) + p_1(y_1) + p_2(x_2) + p_2(y_2) = p(x_1, x_2) + p(y_1, y_2)$; $p(\lambda (x_1, x_2)) = p(\lambda x_1, \lambda x_2) = p_1(\lambda x_1) + p_2(\lambda x_2) = \lambda p_1(x_1) + \lambda p_2 (x_2) = \lambda p(x_1, x_2)$. b) Fie $X_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$. $X_0 \subseteq X \times X$ este subspațiu liniar. Să definim $F_0 : X_0 \to \Gamma$ prin $F_0(x, x) = f(x)$. Prin ipoteză și cu notațiile de mai sus: $F_0(x, x) \leqslant p(x, x)$. Cu teorema lui Hahn-Banach există $F: X \times X \to \Gamma$ liniară, astfel încît $F|_{X_0} = F_0$ și $F(x, y) \leqslant p(x, y)$, $\forall (x, y) \in X \times X$. Să definim $f_1(x) = F(x, 0)$ și $f_2(x) = F(0, x)$. Evident, f_1, f_2 sînt funcționale liniare și $f_1(x) + f_2(x) = F(x, 0) + F(0, x) = F(x, x) = F_0(x, x) = f(x)$; $f_1(x) = F(x, 0) \leqslant p(x, 0) = p_1(x)$ și analog pentru f_2.

15. $\widehat{p}$ este bine definită, deoarece $p(u) \geqslant 0$, $\forall u \in X$. Fie $x, y \in X$ și $\lambda \in \Gamma$. Avem $\widehat{p}(x + y + X_1) = \inf \{p(u) \mid u - (x + y) \in X_1\}$. Fie $v, w \in X$ astfel încît $v - x \in X_1$ și $w - y \in X_1$. Atunci $(v + w) - (x + y) \in X_1$ și $p(v + w) \leqslant p(v) + p(w)$ deci $\inf \{p(u) \mid u - (x + y) \in X_1\} \leqslant \inf \{p(v) \mid v - x \in X_1\} + \inf \{p(w) \mid w - y \in X_1\} = \widehat{p}(x + X_1) + \widehat{p}(y + X_1)$; $\widehat{p}(\lambda x + X_1) = \inf \{p(u) \mid u - \lambda x \in X_1\} = \inf \{p(u) \mid \lambda^{-1} u - x \in X_1\} = \inf \{p(\lambda v) \mid v - x \in X_1\} = |\lambda| \inf \{p(v) \mid v - x \in X_1\} = |\lambda| \widehat{p}(x + X_1)$ dacă $\lambda \neq 0$. Egalitatea este evidentă pentru $\lambda = 0$.

16. Fie X_0 subspațiul liniar generat de x_0 în X. Dacă $y \in X_0$ se scrie $y = \alpha x_0$, să definim $f_0(y) = \alpha\lambda$. f_0 este deci funcțională liniară pe X_0. În plus, dacă $\alpha \geqslant 0$, atunci $f_0(y) = \alpha\lambda \leqslant \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$. Dacă $\alpha < 0$, atunci $f_0(y) = \alpha\lambda = (-\alpha)(-\lambda) \leqslant (-\alpha)(p(-x_0)) = p(\alpha x_0)$. Aplicînd teorema lui Hahn-Banach, se obține o funcțională liniară pe X, avînd proprietățile cerute.

III. SPAȚII LINIARE TOPOLOGICE

1. a) Demonstrație prin inducție. Pentru $n = 1$ nu avem nimic de arătat. Pentru $n = 2$ este chiar definiția convexității. Fie $n \geqslant 3$. Dacă $\lambda_1 = 1$, urmează $\lambda_i = 0$, $\forall i \geqslant 2$, deci nu avem nimic de arătat. Fie deci $\lambda_1 < 1$ iar $1 - \lambda_1 = \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \neq 0$. Prin ipoteza inductivă: $\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_1} x_n \in A$, deoarece $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} \geqslant 0$, iar $\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} = 1$. Notînd $y = \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} x_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_1} x_n$, avem $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y$, care este în A din ipoteza de convexitate. b) Să notăm: $B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \right.$

$\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ x_i \in A\Big\}$. Să arătăm că B este convexă. Fie deci $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ două elemente din B, $\lambda \in [0, 1]$. Avem: $\lambda x + (1 - \lambda) y = \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i = (\lambda\lambda_1) x_1 + \ldots + (\lambda\lambda_n) x_n + (1 - \lambda) \mu_1 y_1 + \ldots + (1 - \lambda) \mu_m y_m$. Evident, $(\lambda \lambda_1), \ldots, (\lambda \lambda_n), (1 - \lambda) \mu_1, \ldots, (1 - \lambda)\mu_m$ sînt pozitive, iar $x_i, y_j \in A$. Mai avem: $(\lambda \lambda_1) + \ldots + (\lambda \lambda_n) + (1 - \lambda) \mu_1 + \ldots + (1 - \lambda) \mu_m = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, ceea ce arată că $\lambda x + (1 - \lambda) y \in B$, deci B este convexă. Urmează că B conține înfășurătoarea convexă a lui A: $\operatorname{co}(A) \subseteq B$. Pe de altă parte, $A \subseteq \operatorname{co}(A)$ și $\operatorname{co}(A)$ este convexă, deci conform pct. a), dacă $x_i \in A$ și $\lambda_i \geqslant 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, rezultă: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \operatorname{co}(A)$, ceea ce arată că $B \subseteq \operatorname{co}(A)$. c) Fie A echilibrată, $z \in \operatorname{co}(A)$ și $|\lambda| \leqslant 1$. De la pct. b) rezultă că există $x_i \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ astfel încît $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Deci $\lambda z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\lambda x_i)$. Deoarece A este echilibrată, $\lambda x_i \in A$, ceea ce arată că $z \in \operatorname{co}(A)$.

2. a) Fie $B = \{\lambda x \mid |\lambda| \leqslant 1,\ x \in A\}$. Să arătăm că B este echilibrată. Fie $z \in B$, $\lambda \in \Gamma$, cu $|\lambda| \leqslant 1$. Există deci $\mu \in \Gamma$ cu $|\mu| \leqslant 1$ și $x \in A$ astfel încît $z = \mu x$. Atunci $\lambda z = (\lambda\mu) x$ iar $|\lambda\mu| \leqslant 1$, deci $\lambda z \in B$, ceea ce arată că B este echilibrată. Fie $\varepsilon(A)$ înfășurătoarea echilibrată a lui A. Avem $A \subseteq \varepsilon(A)$ și $\varepsilon(A)$ este echilibrată. Oricare ar fi $x \in A$ și $|\lambda| \leqslant 1$, avem deci $\lambda x \in \varepsilon(A)$, adică $B \subseteq \varepsilon(A)$, ceea ce arată egalitatea celor două mulțimi. b) Mulțimea $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ (conform figurii 2) este convexă: în adevăr, $\lambda (x, y) + (1 - \lambda) (x_1, y_1) = (\lambda x + (1 - \lambda) x_1, \lambda y + (1 - \lambda) y_1)$ iar $[\lambda x + (1 - \lambda) x_1]^2 + [\lambda y + (1 - \lambda) y_1]^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) + 2\lambda (1 - \lambda) (x x_1 + y y_1) + (1 - \lambda)^2 (x_1^2 + y_1^2)$. Dacă ținem seama că $(x x_1 + y y_1)^2 \leqslant (x^2 + y^2) (x_1^2 + y_1^2)$ și că, prin ipoteză, $x^2 + y^2 \leqslant 1$ și $x_1^2 + y_1^2 \leqslant 1$, rezultă că $[\lambda x + (1 - \lambda) x_1]^2 + [\lambda y + (1 - \lambda) y_1]^2 \leqslant 1$. Înfășurătoarea echilibrată a acestei mulțimi este: $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \leqslant 0, \quad y \leqslant 0\}$, care, evident, nu este convexă: segmentul care unește $(-1, 0)$ cu $(0,1)$ nu are alte puncte comune cu mulțimea.

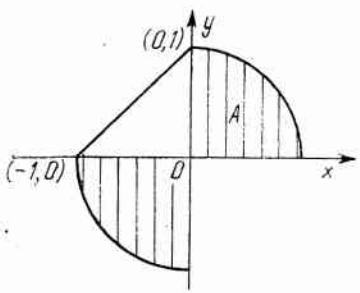

Fig. 2.

3. Înfășurătoarea echilibrată a mulțimii $\{x, y\}$ este (conform ex. 2a): $\{\lambda x \mid |\lambda| \leqslant 1\} \cup \{\lambda y \mid |\lambda| \leqslant 1.\}$ Dacă această mulțime este convexă, atunci conține punctul $1/2\,(x + y)$, deci există $\lambda \in \Gamma$ cu $|\lambda| \leqslant 1$ astfel încît (de exemplu): $1/2\,(x + y) = \lambda x$, adică $y = (2\lambda - 1)\, x$. Deci, o condiție necesară este ca x și y să fie liniar dependenți. Reciproc, dacă presupunem, că x și y sînt liniar dependenți, să arătăm că înfășurătoarea echilibrată a mulțimii $\{x, y\}$

este convexă. Dacă $x = 0$ sau $y = 0$, înfășurătoarea este $\{\lambda x \mid |\lambda| \leqslant 1\}$, care este evident convexă. Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$, putem presupune $y = \lambda x$, în care caz înfășurătoarea echilibrată a mulțimii $\{x, y\}$ este, de asemenea, $\{\lambda x \mid |\lambda| \leqslant 1\}$.

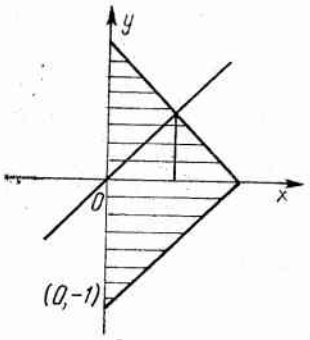

Fig. 3.

4. a) Fie $A \subseteq X$ convexă, $x, y \in f(A)$ și $\lambda \in [0,1]$. Există deci $x_1, y_1 \in A$ astfel încît $x = f(x_1)$ și $y = f(y_1)$. Avem $\lambda x + (1 - \lambda)\, y = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(y_1) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)\, y_1)$, iar $\lambda x_1 + (1 - \lambda)\, y_1 \in A$, ceea ce arată că $f(A)$ este convexă. Fie $A \subseteq X$ echilibrată, $x \in f(A)$, $\lambda \in \Gamma$ cu $|\lambda| \leqslant 1$. Există $x_1 \in A$ astfel încît $x = f(x_1)$, deci $\lambda x = f(\lambda x_1)$, iar $\lambda x_1 \in A$, deci $\lambda x \in f(A)$, ceea ce arată că $f(A)$ este echilibrată. *b*) Fie $B \subseteq Y$ convexă, $x, y \in f^{-1}(B)$ și $\lambda \in [0, 1]$. Urmează $f(x), f(y) \in B$, deci din faptul că B este convexă rezultă $f(\lambda x + (1 - \lambda) y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \in B$, adică $\lambda x + (1 - \lambda) y \in f^{-1}(B)$, ceea ce arată că $f^{-1}(B)$ este convexă. Fie $B \subseteq Y$ echilibrată, $x \in f^{-1}(B)$ și $|\lambda| \leqslant 1$. Avem $f(x) \in B$, deci $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in B$, de unde $\lambda x \in f^{-1}(B)$, ceea ce arată că $f^{-1}(B)$ este echilibrată. Fie $B \subseteq Y$ absorbantă și $x \in X$. Deoarece B este absorbantă, există $\delta > 0$ astfel încît $\lambda f(x) \in B$, oricare ar fi $0 \leqslant |\lambda| \leqslant \delta$. Deci $\lambda x \in f^{-1}(B)$, ceea ce arată că $f^{-1}(B)$ este absorbantă. c) Fie $A \subseteq Y$ absorbantă iar $y \in Y$. Deoarece f este surjectivă, există $x \in X$ astfel încît $y = f(x)$. A fiind absorbantă, există $\delta > 0$, astfel încît $\lambda x \in A$, oricare ar fi $0 \leqslant |\lambda| \leqslant \delta$. Rezultă $\lambda y = f(\lambda x) \in f(A)$.

5. a) Conform ex. 4 a), $f(\text{co}(A))$ este convexă. Din $f(A) \subseteq f(\text{co}(A))$ rezultă deci $\text{co}(f(A)) \subseteq f(\text{co}(A))$. Reciproc, fie $y \in f(\text{co}(A))$, deci din ex. 1a) există $x_i \in A$ și $\lambda_i \geqslant 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, încît $y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. Deoarece $f(x_i) \in f(A)$, urmează că $y \in \text{co}(f(A))$. Conform ex. 4a), $f(\varepsilon(A))$ este echilibrată, deci $\varepsilon(f(A)) \subseteq f(\varepsilon(A))$. Invers, dacă $y \in f(\varepsilon(A))$, există $x \in A$ și $|\lambda| \leqslant 1$ astfel încît $y = f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ceea ce arată că $y \in \varepsilon(f(A))$. b) Conform ex 4b), $f^{-1}(\text{co}(B))$ este convexă, ceea ce demonstrează incluziunea propusă. Drept contraexemplu: fie $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^2$ iar $f : X \to Y$, definită prin $f(t) = (t, t)$. Notăm $B = \{(0, -1)\} \cup \{(t, 1 - t) \mid t \in [0, 1]\}$. Avem $f^{-1}(B) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, deci $\text{co}\, f^{-1}(B) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, în timp ce $f^{-1}(\text{co}(B)) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (conform figurii 3). Utilizînd ex. 1 b), avem $y \in \text{co}(x + A) \Leftrightarrow \exists\ \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $x_i \in A$, încît $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x + x_i) \Leftrightarrow \exists\, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $x_i \in A$, încît $y = x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Leftrightarrow y \in x + \text{co}(A)$.

6. Fie $x = (x_n) \in A$, $y = (y_n) \in A$ și $\lambda \in [0,1]$. Avem: $\lambda x + (1 - \lambda) y = (\lambda x_n + (1 - \lambda)\, y_n)$ iar $\sum_{n=1}^{\infty} n\, |\lambda x_n + (1 - \lambda)\, y_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\, [\lambda^2 |x_n|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)|x_n y_n| + (1 - \lambda)^2 |y_n|^2] = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n y_n| +$

$+ (1-\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n|y_n|^2 \leqslant \lambda^2 + \lambda(1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} n[|x_n|^2 + |y_n|^2] + (1-\lambda)^2 \leqslant 1$ deci $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$ și A este deci convexă. Fie $|\lambda| \leqslant 1$. Avem: $\sum_{n=1}^{\infty} n|\lambda x_n|^2 \leqslant$ $\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^2 \leqslant 1$, deci $\lambda x \in A$, ceea ce arată că A este echilibrată. Dacă notăm $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ avem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, deci $x_0 \in l^2$. Dacă $\lambda x_0 \in A$, urmează $\sum_{n=1}^{\infty} n \left|\lambda \frac{1}{n}\right|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$, ceea ce implică $\lambda = 0$, deci A nu este absorbantă.

7. Fie C mulțimea din membrul doi. Luînd $\lambda = 1$, respectiv $\lambda = 0$, găsim $A \subseteq C$ și $B \subseteq C$, deci $A \cup B \subseteq C$. Să arătăm că C este convexă. Fie $x = \lambda a + (1-\lambda) b \in C$ și $y = \lambda' a' + (1-\lambda') b' \in C$ iar $\mu \in [0, 1]$. Avem: $\mu x + (1-\mu) y = [\mu\lambda a + (\lambda' - \mu\lambda') a'] + [(\mu - \mu\lambda) b + (1 - \mu - \lambda' + \mu\lambda') b']$. Din ipoteză $\mu\lambda \geqslant 0$, $\lambda' - \mu\lambda' \geqslant 0$, $\mu - \mu\lambda \geqslant 0$, $1 - \mu - \lambda' + \mu\lambda' \geqslant 0$. Notînd $\gamma = \mu\lambda + \lambda' - \mu\lambda'$, distingem cazurile: $\gamma = 0$. Atunci prima paranteză dispare, iar în a doua paranteză suma coeficienților este 1, de unde $\mu x + (1-\mu) y \in B \subseteq C$. $\gamma = 1$. Se arată, ca mai sus, că $\mu x + (1-\mu) y$ este din $A \subseteq C$. $\gamma \in (0,1.)$ Putem scrie: $\mu x + (1-\mu) y = \gamma [\mu\lambda\gamma^{-1} a + (\lambda' - \mu\lambda')\gamma^{-1} a'] + (1-\gamma)[(\mu - \mu\lambda)(1-\gamma)^{-1} b + (1 - \mu - \lambda' + \mu\lambda')(1-\gamma)^{-1}, b']$, iar: $\mu\lambda\gamma^{-1} a + (\lambda' - \mu\lambda') \gamma^{-1} a' \in A$, $(\mu - \mu\lambda)(1-\gamma)^{-1} b + (1 - \mu - \lambda' + \mu\lambda')(1-\gamma)^{-1} b^{-1} \in B$, ceea ce arată că $\mu x + (1-\mu) y \in C$. Cu acestea, avem co $(A \cup B) \subseteq C$. Reciproc, dacă $x \in C$, atunci $x = \lambda a + (1-\lambda) b$, iar a, $b \in A \cup B$, deci $x \in$ co $(A \cup B)$, această mulțime fiind convexă.

8. Dacă A este absorbantă, condiția din enunț are loc fără nici o ipoteză suplimentară. Reciproc, fie A echilibrată și să presupunem îndeplinită condiția din enunț. Fie $x \in X$ și $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda x \in A$. Oricare ar fi $0 \leqslant |\delta| \leqslant \lambda$, avem $\delta x = \delta\lambda^{-1} (\lambda x) \in A$, căci $|\delta\lambda^{-1}| \leqslant 1$, iar A este echilibrată.

9. Fie $t \in [0, 1]$ și $t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 2^{-n}$ scrierea lui t în baza 2, deci $c_n = 0$ sau 1. Notăm $t_n = \sum_{k=1}^{n} c_k 2^{-n}$. Vom arăta prin inducție că $t_n x + (1 - t_n) y \in A$. Pentru $n = 1$ avem posibilitățile: $c_1 = 0$ și atunci $t_1 = 0$, iar $0x + 1y \in A$; $c_1 = 1$, și atunci $t_1 = \frac{1}{2}$, iar $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} y \in A$ prin ipoteză. Să presupunem acum că $t_n x + (1 - t_n) y \in A$. Dacă $c_{n+1} = 0$, avem $t_{n+1} = t_n$ deci nu este nimic de demonstrat. Dacă $c_{n+1} = 1$, atunci $t_{n+1} = t_n + 2^{-(n+1)}$ și: $t_{n+1} x + (1 - t_{n+1}) y = {}^1/_2[t_n x + (1 - t_n) y] + {}^1/_2[(t_n + 2^{-n}) x + (1 - t_n - 2^{-n}) y]$. Avem $t_n x + (1 - t_n) y \in A$ prin ipoteză. Dacă $c_n = 0$, atunci $(t_n + 2^{-n}) x + (1 - t_n - 2^{-n}) y \in A$ tot prin ipoteză; deci, în această situație, demonstrația este încheiată. Fie, în sfîrșit, $c_n = 1$. Să notăm m cel mai mare întreg pentru care $c_m = 0$ ($m = 0$ dacă nu există nici un indice cu această proprietate). Rezultă: $t_n + 2^{-n} = \sum_{k=1}^{m-1} c_k 2^{-k} + 2^{-m}$ deci, prin ipoteză, $(t_n + 2^{-n}) x + (1 - t_n -$

$-2^{-n})y \in A$. Cu aceasta, toate cazurile au fost considerate. Însă $t_n \to t$, deci din faptul că A este închisă, iar X este s.l.t., rezultă că $tx + (1-t)y \in A$.

10. *a*) Putem scrie $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$. Translațiile fiind homeomorfisme, $(A + b)$ sînt mulțimi deschise, deci și reuniunea lor va fi deschisă. b) Notînd $f: X \times X \to X$ aplicația $f(x, y) = x + y$, avem $f(A \times B) = A + B$, deci $A + B$ este compact, ca imagine a unui compact printr-o aplicație continuă. c) Fie $c_i = a_i + b_i \in A + B$ un șir generalizat, convergent la $c \in A + B$. A fiind compact, $\{a_i\}$ are un subșir $\{a_j\}$ convergent la $a \in A$. Dar $b_j = c_j - a_j$ converge la $c-a$. B fiind închis, urmează $c-a \in B$, adică $c \in A + B$. d) Notăm $A = \{1, 2, ..., n, ...\}$ și $B = \left\{-2 - \frac{1}{2}, -3 - \frac{1}{3}, ..., -n - \frac{1}{n}, ...\right\}$. A și B sînt, evident, închise în $\mathbf{R}$. Un element oarecare din $A + B$ este de forma $n + \left(-m - \frac{1}{m}\right)$, cu $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$. Urmează $n + \left(-m - \frac{1}{m}\right) \neq 0$, adică $0 \notin A + B$. Însă $-\frac{1}{n} = n + \left(-n - \frac{1}{n}\right) \in A + B$, deci $0 \in \overline{A + B}$.

11. Dacă $X_1 = X$, avem $\overset{\circ}{X}_1 = \overset{\circ}{X} = X \neq \emptyset$. Reciproc, fie $x \in \overset{\circ}{X}_1$, deci există V vecinătate a originii, astfel încît $x + V \subseteq X_1$. Pentru fiecare $y \in X$ există $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda y \in V$, deci putem scrie: $y = \lambda^{-1}[(x + \lambda y) - x] \in X_1$, căci $x + \lambda y \in x + V \subseteq X_1$, iar X_1 este subspațiu liniar. Rezultă $X \subseteq X_1$.

12. Fie X separat și $\mathcal{U}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Oricare a fi $x \neq 0$, există $V \in \mathcal{U}$ încît $x \notin V$, deci $x \notin \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V$, ceea ce arată că $\bigcap_{V \in \mathcal{U}} V = \{0\}$. Reciproc, fie această relație îndeplinită și $x \neq y$. Există $V \in \mathcal{U}$ încît $(x - y) \notin V$. Dacă $V_1 \in \mathcal{U}$ satisface $V_1 + V_1 \subseteq V$, vom arăta că $(x - V_1) \cap (y + V_1) = \emptyset$. În adevăr, dacă $z \in (x - V_1) \cap (y + V_1)$, ar exista $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_1$, astfel încît $z = x - v_1 = y + v_2$, sau $x - y = v_1 + v_2 \in V_1 + V_1 \subseteq V$, contradicție.

13. Vom arăta că înmulțirea cu scalari nu este operație continuă. Fie $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Dacă $m \neq n$, avem $n^{-1}x_0 \neq m^{-1}x_0$, deci șirul $\{n^{-1}x_0\}$ nu este constant, nici măcar începînd de la un rang oarecare, deci nu este convergent în topologia discretă. Deoarece $n^{-1} \to 0$, rezultă că aplicația $\Gamma \times X \to X$, dată prin $(\lambda, x) \to \lambda x$, nu este continuă.

14. Fie $x \in A$ și $\mathcal{V}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Oricare ar fi $U \in \mathcal{V}$, avem $(x - U) \cap A \neq \emptyset$, adică există $u \in U$ și $a \in A$, astfel încît $x - u = a$, adică $x = a + u \in A + U$, ceea ce arată că $\bar{A} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{V}} (A + U)$. Reciproc, fie $x \in A + U$ pentru orice $U \in \mathcal{V}$. Pentru orice vecinătate V a originii, există $U \in \mathcal{V}$ încît $(-U) \subseteq V$, deci $x \in A + U \subseteq A - V$, adică există $a \in A$ și $v \in V$ încît $x = a - v$ sau $x + v = a \in A$. Urmează $(x + V) \cap A \neq \emptyset$, ceea ce dovedește că $x \in \bar{A}$, adică incluziunea inversă. Luînd $A = \{0\}$, obținem $\overline{\{0\}} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V$, deci regăsim rezultatul de la exercițiul 12.

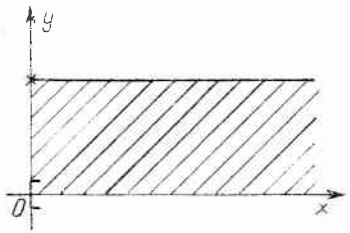

Fig. 4.

15. Să definim $f : X \times X \times \Gamma \to X$ prin $f(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda) y$. Conform exercițiului 7, avem co $(K_1 \cup K_2) = f(K_1 \times K_2 \times [0,1])$. f fiind continuă, iar $[0, 1]$ compact, urmează că imaginea este compactă.

16. a) Fie $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$. Făcînd eventual o translație, putem presupune $z = 0$, adică $y = \lambda (\lambda - 1)^{-1} x$. $\overset{\circ}{A}$ fiind deschisă, $\lambda(\lambda - 1)^{-1} \overset{\circ}{A}$ este o vecinătate pentru y. Urmează că există $y_0 \in (\lambda(\lambda - 1)^{-1}\overset{\circ}{A}) \cap A$, adică $v_0 \in \overset{\circ}{A}$, astfel încît $\lambda(\lambda - 1)^{-1} v_0 \in A$. Să considerăm atunci aplicația $v \to \lambda(v - v_0)$, care este un homeomorfism, căci $\lambda \neq 0$. Această aplicație duce v_0 în 0, deci mulțimea $U = \{\lambda(v - v_0) \mid v \in \overset{\circ}{A}\}$ este o vecinătate a originii. Notînd $v' = \lambda(\lambda - 1)^{-1} v_0$, avem $v' \in A$ și $v' = (\lambda - 1)\lambda^{-1} v_0$. De aici $\lambda(v - v_0) = \lambda v + (1 - \lambda) v' \in A$, adică $U \subseteq A$, ceea ce arată că $0 \in \overset{\circ}{A}$.

b) Faptul că $\overset{\circ}{A}$ este convexă rezultă direct din a). Să definim $f : X \times X \times \Gamma \to X$ prin $f(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda) y$. f este continuă și $f(A \times A \times [0, 1]) \subseteq A$ din convexitate; deci $f(\bar{A} \times \bar{A} \times [0, 1]) \subseteq \bar{A}$, ceea ce arată că $\bar{A}$ este convexă. Incluziunile $\overset{\circ}{A} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$ și $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \bar{A}$ sînt evidente. Fie $y \in \bar{A}$ și $x \in \overset{\circ}{A}$. Notînd $z_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda) y$ avem, pentru $\lambda \in (0, 1)$, $z_\lambda \in \overset{\circ}{A}$, conform a), iar $y = \lim_{\lambda \to 0} z_\lambda$, ceea ce arată că $y \in \overline{\overset{\circ}{A}}$. Să mai arătăm incluziunea $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overset{\circ}{A}$. Printr-o translație, este suficient să arătăm că $0 \in \overline{\overset{\circ}{A}}$ implică $0 \in \overset{\circ}{A}$. Să alegem $W \subseteq \bar{A}$, o vecinătate simetrică a originii. Din cele de mai sus, urmează $0 \in \overline{\overset{\circ}{A}}$, deci $W \cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Dacă $z \in W \cap \overset{\circ}{A}$, avem $(-z) \in W \subseteq \bar{A}$, deci conform a): $0 = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} (-z) \in \overset{\circ}{A}$.

17. a) Conform exercițiului 16 b), $\overline{\text{co}\,(A)}$ este convexă și conține $\bar{A}$, ceea ce demonstrează incluziunea. Drept contraexemplu, fie $A = \{(0, 1)\} \cup \{[0, \infty) \times \{0\}\}$; A este, evident, închisă (conform figurii 4), iar co $(A) = \{[0, \infty) \times [0, 1)\} \cup \{(0, 1)\}$, în timp ce $\overline{\text{co}\,(A)} = [0, \infty) \times [0, 1]$. b). Fie A deschisă și $x \in \text{co}\,(A)$. Deoarece $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ cu $x_i \in A$, avem $x \in \lambda_1 A + \ldots + \lambda_n A$, iar această mulțime este deschisă și conținută în co (A). ceea ce dovedește prima afirmație. În particular, co $(\overset{\circ}{A})$ rezultă mulțimea deschisă, deci co $(\overset{\circ}{A}) \subseteq \overset{\circ}{\text{co}\,(A)}$. Pentru contraexemplu, fie $A = \{0\} \cup [1, 2]$. Avem $\overset{\circ}{A} = (1, 2)$, deci co $(\overset{\circ}{A}) = (1, 2)$, în timp ce co $(A) = [0, 2]$ deci $\overset{\circ}{\text{co}\,(A)} = (0, 2)$.

18. Fie A, B deschise, nevide, cu $A \cup B = X$. Să fixăm $x \in A$, $y \in B$ și să definim $f : \mathbf{R} \to X$ prin $f(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$. f este continuă, deci $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ sînt deschise și nevide. În sfîrșit, avem $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = \mathbf{R}$, deci, din faptul că $\mathbf{R}$ este conex, urmează că există $\lambda_0 \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ adică $A \cap B \neq \emptyset$ și X rezultă conex. Deoarece translațiile sînt homeomorfisme, este suficient să arătăm că originea are un sistem fundamental de vecinătăți conexe. Vom arăta că orice vecinătate echilibrată și deschisă a originii este conexă. Fie V o astfel de vecinătate, $A, B \subseteq X$ deschise, cu $A \cup B = V$, iar A, B nevide. Să alegem $x \in A$, $y \in B$ și să definim $f : [-1, 1] \to V$ prin: $f(\lambda) = -\lambda x$ dacă $\lambda \in [-1, 0)$ iar $f(\lambda) = \lambda x$ dacă $\lambda \in [0, 1]$. f este definită bine, căci V este echilibrată. Se verifică imediat că f este continuă $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ sînt deci nevide și deschise în $[-1, 1]$ iar $[-1, 1] = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \cdot [-1, 1]$ fiind conex, există $\lambda_0 \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, deci $A \cap B \neq \emptyset$ și V rezultă conex.

19. a) X_1 este subspațiu liniar dacă și numai dacă $X_1 + X_1 \subseteq X_1$ și $\Gamma X_1 \subseteq X_1$. Continuitatea sumei și a produsului cu scalari arată că $\overline{X}_1 + \overline{X}_1 = \overline{X_1 + X_1} \subseteq \overline{X}_1$ și $\Gamma \overline{X}_1 = \overline{\Gamma X_1} \subseteq \overline{X}_1$, deci $\overline{X}_1$ este subspațiu liniar.

b) Fie H hiperplan, deci $x_0 + X_0 = H$, unde X_0 este subspațiu liniar maximal. Translațiile fiind homeomorfisme, avem $\overline{H} = x_0 + \overline{X}_0$. Cum $X_0 \subseteq \overline{X}_0$ iar $\overline{X}_0$ este subspațiu liniar, urmează că: fie $X_0 = \overline{X}_0$, în care caz $H = \overline{H}$ este închis; fie $\overline{X}_0 = X$, în care caz $\overline{H} = X$, deci H este dens.

20. Să fixăm o bază algebrică $\{e_1, ..., e_n\}$ în X și să definim $f : \Gamma^n \to X$ prin $f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Vom arăta că f este izomorfism algebric și topologic. f este, evident, aplicație liniară, iar continuitatea este asigurată de faptul că X este s.l.t. Inversa lui f este $g : X \to \Gamma^n$, definită prin $g(x) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ unde λ_i sînt definiți de $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Rămîne să arătăm că g este continuă în origine. Să notăm $D = \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Gamma^n \mid \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant 1\right\}$ și $S = \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Gamma^n \mid \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1\right\}$. S este compactă, deci $f(S)$ este compactă și $0 \notin f(S)$. X fiind separat, există o vecinătate echilibrată V a originii, astfel încît $V \cap f(S) = \emptyset$. Vom arăta că $V \subseteq f(D)$ sau, echivalent, că $V \subseteq g^{-1}(D)$, ceea ce va încheia demonstrația. Presupunînd, prin absurd, că $V \not\subseteq f(D)$, există $x \in V$ astfel încît $x \notin f(D)$. Deci $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ cu $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 > 1$. Să notăm $\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{-1/2}$ Deoarece $0 < \lambda \leqslant 1$, urmează $\lambda x \in V$. Însă $\sum_{i=1}^{n} |\lambda\lambda_i|^2 = 1$, deci $\lambda x \in f(S)$, ceea ce contrazice alegerea lui V. Fie acum $X_1 \subseteq X$ subspațiu finit dimensional și $x_1 \in \overline{X}_1$. Fie X_0 subspațiul generat de X_1 și de $\{x_1\}$. Dacă presupunem, că $x_1 \notin X_1$, atunci există o bază $\{e_1, ..., e_n\}$ în X_1, încît $\{e_1, ..., e_n, x_1\}$ să fie bază în X_0. Cu cele de mai sus, X_0 este homeomorf cu Γ^{n+1}, deci există un șir $y_n \in X_1$ cu $y_n \to x_1$. Însă convergența în Γ^{n+1} este echivalentă cu convergența pe coordonate, de unde $x_1 = 0$: în adevăr, x_1 are primele n coordonate nule prin alegerea bazei iar y_n are ultima coordonată nulă, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Acest fapt contrazice însă $x_1 \notin X_1$.

21. $Y_1 = f(X)$ este s.l.t. separat, de dimensiune finită. Conform exerciț. 20, rămîne să arătăm că orice aplicație liniară $f : \Gamma^n \to \Gamma^m$ este continuă. Însă (conform ex. I. 11) $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i}\lambda_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi}\lambda_i\right)$ cu $\alpha_{ij} \in \Gamma$. Dacă $\| (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ atunci $\| f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \| \leqslant M \| (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \|$, unde $M = \max |\alpha_{ij}|$, ceea ce arată continuitatea aplicației f.

22. Dacă notăm $\pi : X \to X/M$ proiecția canonică, atunci $\pi(N)$ este subspațiu finit dimensional într-un spațiu liniar topologic separat (conform exerciț. 30). Din exercițiul 20 urmează că $\pi(N)$ este închis. Deoarece $M + N = \pi^{-1}(\pi(N))$, afirmația rezultă. Contraexemplu se găsește la exercițiul VIII.64.

23. Necesitatea este evidentă. Pentru suficiență, fie X s.l.t. separat, avînd un sistem fundamental numărabil de vecinătăți ale originii. Putem alege atunci un sistem fundamental $\{W_n\}$ de vecinătăți ale originii, astfel încît fiecare W_n să fie echilibrată și $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$. Pentru fiecare mulțime finită $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$ de numere naturale, să notăm $W_J = W_{j_1} + \ldots + W_{j_m}$ și să definim $\mu_J = \sum_{i=1}^{n} 2^{-j_i}$ și $q : X \to \mathbf{R}$ prin $q(x) = \inf\{\mu_J \mid x \in W_J\}$, dacă există J astfel încît $x \in W_J$, și $q(x) = 1$ în caz contrar. Dacă $\varepsilon > 0$, iar $S_\varepsilon = \{x \mid q(x) \leqslant \varepsilon\}$, avem $W_n \subseteq S_{2^{-n}}$, ceea ce arată că S_ε este vecinătate a originii. Din $S_{2^{-n-1}} \subseteq W_n$ rezultă că $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ este sistem fundamental de vecinătăți ale originii. X fiind separat, avem $\bigcap_{\varepsilon>0} S_\varepsilon = \{0\}$, ceea ce arată că $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Fiecare mulțime W_J fiind echilibrată, avem $q(x) = q(-x)$. Să mai demonstrăm că $q(x + y) \leqslant q(x) + q(y)$. Deoarece $q(x + y) \leqslant 1$, este suficient să considerăm cazul $q(x) + q(y) < 1$. Dacă $\varepsilon > 0$ satisface $q(x) + q(y) + 2\varepsilon < 1$, putem alege J' și J'' astfel încît $x \in W_{J'}$, $y \in W_{J''}$ iar $\mu_{J'} < q(x) + \varepsilon$, $\mu_{J''} < q(y) + \varepsilon$. Avem deci $\mu_{J'} + \mu_{J''} < 1$ și ținînd seama de definiția lui μ_J, rezultă că există J astfel încît $\mu_J = \mu_{J'} + \mu_{J''}$. Din $W_{J'} + W_{J''} \subseteq W_J$ urmează că $x + y \in W_J$ și deci $q(x+y) \leqslant \mu_J < q(x) + q(y) + 2\varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deducem inegalitatea propusă. Notînd acum $d(x, y) = q(x - y)$, cele de mai sus arată că d este o metrică compatibilă cu topologia lui X și invariantă la translații.

24. Pentru fiecare $x \in X$ să notăm $\mathcal{U}(x) = \{x + V \mid V \in \mathcal{U}\}$. Vom arăta că $\mathcal{U}(x)$ formează un sistem fundamental de vecinătăți pentru x. Deoarece orice $V \in \mathcal{U}$ este echilibrat, avem $0 \in V$, adică $x \in x + V$ și condiția S_1 (conform § 3.09 din manual) este îndeplinită. S_2 este îndeplinită conform (i). Fie $x + V \in \mathcal{U}(x)$, $V_1 \in \mathcal{U}$ astfel încît $V_1 + V_1 \subseteq V$. Oricare ar fi $y \in x + V_1$, avem $y + V_1 \in \mathcal{U}(y)$ iar: $y + V_1 \subseteq (x + V_1) + V_1 \subseteq x + V$, deci și S_3 are loc. Rămîne să verificăm continuitatea aplicațiilor de spațiu liniar. Fie $(x_0, y_0) \in X \times X$ și $x_0 + y_0 + V$ din $\mathcal{U}(x_0 + y_0)$. Dacă $V_1 + V_1 \subseteq V$, atunci $(x_0 + V_1) + (y_0 + V_1) \subseteq x_0 y_0 + V$. Această incluziune demonstrează continuitatea aplicației sumă. Fie $\lambda_0 \in \Gamma$ și $x_0 \in X$, iar $V \in \mathcal{U}$. Fie $V_1 + V_1 \subseteq V$ iar $\delta > 0$ cu proprietatea că $(\lambda - \lambda_0)\, x_0 \in V_1$ de îndată ce $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Fie apoi $n \geqslant |\lambda_0| + \delta$ și $V' \in \mathcal{U}$ astfel încît $nV' \subseteq V$. Deoarece V' este echilibrată, $\lambda V' \subseteq V$. Dacă notăm $V_2 = V' \cap V_1$, avem: $\lambda(x_0 + V_2) \subseteq \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda V_2 \subseteq \lambda_0 x_0 + V_1 + V_1 \subseteq \lambda_0 x_0 + V$, ceea ce arată că înmulțirea cu scalari este continuă.

25. Fie V_1 astfel încît $V_1 + V_1 \subseteq V$. Utilizînd exercițiul 14, $\overline{V}_1 = \bigcap_{W \in \mathcal{U}} (W + V_1) \subseteq V_1 + V_1 \subseteq V$.

26. Suma fiind continuă prin ipoteză, rămîne să arătăm continuitatea înmulțirii cu scalari. Fie $\lambda_0 \in \Gamma$, $x_0 \in X$ și U o vecinătate a originii. Fie V o vecinătate a originii astfel încît $V + V + V \subseteq U$ și $\delta_1 > 0$, încît $\lambda x_0 \in V$, oricare ar fi $|\lambda| \leqslant \delta_1$. Din (*iii*) rezultă că putem alege W_1 vecinătate a originii în X, astfel încît $\lambda_0 W_1 \subseteq V$. Fie $\delta_2 > 0$ și W_2 vecinătate a originii în X, astfel încît $\lambda x \in V$, oricare ar fi $|\lambda| \leqslant \delta_2$ și $x \in W_2$ (conform (*iv*)). Dacă notăm $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ și $W = W_1 \cap W_2$, avem, pentru orice $x \in W$ și $|\lambda| \leqslant \delta$: $(\lambda_0 + \lambda)(x_0 + x) = \lambda_0 x_0 + \lambda x_0 + \lambda_0 x + \lambda x \in \lambda_0 x_0 + V + V + V \subseteq \lambda_0 x_0 + U$, ceea ce demonstrează continuitatea înmulțirii cu scalari.

27. Verificăm condițiile din exercițiul 24. Avem $S(0, \varepsilon) \cap S(0, \varepsilon') = S(0, \min\{\varepsilon, \varepsilon'\})$; $S\left(0, \frac{1}{2}\varepsilon\right) + S\left(0, \frac{1}{2}\varepsilon\right) \subseteq S(0, \varepsilon)$. Fie $\mu \in \mathbf{C}$. Dacă $\operatorname{Im}\mu = 0$, avem $\mu \in S(0, \varepsilon)$. Dacă $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, atunci $\delta = \frac{\varepsilon}{2|\operatorname{Im}\mu|} > 0$ are proprietatea că, pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$, $|\lambda| \leqslant \delta$, avem $\lambda\mu \in S(0, \varepsilon)$. În sfîrșit, dacă $\lambda \in [-1, 1]$, evident, $\lambda S(0, \varepsilon) \leqslant S(0, \varepsilon)$, deci avem o topologie compatibilă cu structura de spațiu liniar real. Să arătăm că înmulțirea cu $i \in \mathbf{C}$ nu este continuă. Fie $\lambda \in \mathbf{C}$ și fie $S(i\lambda, 1)$. Oricare ar fi $\delta > 0$, avem $(1 + \lambda_2) + \lambda_2 i \in S(\lambda, \delta)$ (unde $\lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda$). Însă $i[(1 + \lambda_2) + i\lambda_2] = -\lambda_2 + i(1 + \lambda_2) \notin S(i\lambda, 1)$.

28. Fie $\psi: X \times X \to X$, $\varphi: \Gamma \times X \to X$ aplicațiile $\psi(x, y) = x + y$ și $\varphi(\lambda, x) = \lambda x$, iar $\psi_i: X_i \times X_i \to X_i$; $\varphi_i: \Gamma \times X_i \to X_i$ aplicațiile corespunzătoare spațiilor X_i. Avem diagramele comutative:

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\psi} & X \\ {\scriptstyle f_i \times f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ X_i \times X_i & \xrightarrow{\psi_i} & X_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma \times X & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle 1_\Gamma \times f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ \Gamma \times X_i & \xrightarrow{\varphi_i} & X_i \end{array}$$

iar f_i, ψ_i și φ_i sînt continue prin ipoteză. Deci $f_i \circ \psi$ și $f_i \circ \varphi$ sînt continue, $\forall i \in I$. Avînd în vedere că topologia lui X a fost definită ca cea mai puțin fină pentru care aplicațiile f_i sînt continue, urmează că ψ și φ sînt continue, ceea ce arată că topologia astfel definită este compatibilă cu structura de spațiu liniar a lui X.

29. a) $\bigoplus_{i \in I} X_i$ este subspațiu liniar: dacă $(x_i), (y_i) \in \prod_{i \in I} X_i$ au proprietatea că $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ și $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ sînt finite, atunci $\{i \in I \mid x_i + y_i \neq 0\} \subseteq \{i \in I \mid x_i \neq 0\} \cup \{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ și $\{i \in I \mid \lambda x_i \neq 0\} \subseteq \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ sînt, de asemenea, finite. ε_i sînt, evident, liniare. Fie $V_i \subseteq X_i$ o vecinătate a originii și să notăm $V = \{(x_i) \in \bigoplus_{i \in I} X_i \mid x_i \in V_i\}$. Se obține astfel un sistem fundamental de vecinătăți ale originii într-o topologie pe $\bigoplus_{i \in I} X_i$, compatibilă cu structura de spațiu liniar. În plus, este evident că această topologie este cea mai fină pentru care toate aplicațiile ε_i sînt continue. Deoarece această topologie este mai fină decît urma topologiei de pe spațiul produs (conform ex. 28), urmează că incluziunea $\bigoplus_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$ este continuă. b) Familia $\{f(V)\}$, cînd V parcurge sistemul vecinătăților originii, formează un sistem fundamental de vecinătăți ale originii în Y, într-o topologie compatibilă cu struc-

tura de spațiu liniar (conform ex. 24). Faptul că fiecare $f(V)$ este absorbantă este asigurat de surjectivitatea lui f (conform ex. 4). Este evident că această topologie este cea mai fină pentru care f este continuă.

30. a) Dacă X/X_1 este separat, atunci $\{0\}$ este închis în X/X_1, deci X_1 este închis, fiind contraimaginea lui $\{0\}$ prin aplicația continuă $p : X \to X/X_1$. Reciproc, să presupunem că X_1 este închis. Avem deci $X_1 = \overline{X}_1 = \bigcap (V + X_1)$. Deoarece $V + X_1 = p(V)$, rezultă că în X/X_1 avem: $\{0\} = \bigcap_{V \in \mathcal{U}} p(V)$, ceea ce arată că X/X_1 este separat. b) Pentru $x + X_1 \in X/X_1$ să definim $\tilde{f}(x + X_1) = f(x)$. Este suficient să arătăm că $\tilde{f}$ este corect definită. Fie $x, y \in X$ cu $x - y \in X_1 = \overline{\{0\}}$. Dacă $f(x - y) \neq 0$, din faptul că Y este separat rezultă existența unei vecinătăți V a lui $f(x - y)$, astfel încît $0 \notin V$. Deci $f^{-1}(V)$ este vecinătate pentru $x - y$ în X, iar $0 \notin f^{-1}(V)$, ceea ce contrazice $x - y \in \{0\}$.

31. a) Fie A mărginită și V o vecinătate a originii. Fie $V_1 \subseteq V$ o vecinătate închisă a originii (conform ex. 25) iar $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda A \subseteq V_1$. Atunci $\lambda \bar{A} \subseteq \bar{V}_1 \subseteq V$, ceea ce arată că $\bar{A}$ este mărginită. Dacă $\alpha = 0$, atunci $\alpha A = \{0\}$ este evident mulțime mărginită. Dacă $\alpha \neq 0$, fie V o vecinătate echilibrată a originii. Dacă $\lambda A \subseteq V$ cu $\lambda > 0$, atunci $\lambda \| \alpha |^{-1} (\alpha A) \subseteq \alpha | \alpha |^{-1} V \subseteq V$, deci αA este mărginită. În sfîrșit, dacă $\lambda A \subseteq V$ și $B \subseteq A$, atunci $\lambda B \subseteq V$. b) Fie V o vecinătate a originii iar $\lambda, \mu > 0$ astfel încît $\lambda A \subseteq V_1$, $\mu B \subseteq V_1$, unde V_1 este o vecinătate echilibrată a originii și $V_1 + V_1 \subseteq V$. Notînd $\alpha = \min\{\lambda, \mu\}$, avem $\alpha(A \cup B) \subseteq V_1$ și $\alpha(A + B) \subseteq V_1 + V_1 \subseteq V$, ceea ce arată că $A \cup B$ și $A + B$ sînt mărginite. c) $(i) \Rightarrow (ii)$ rezultă de la pct. a) $(ii) \Rightarrow (iii)$. Prin ipoteză, valorile șirului $\{x_n\}$ formează o mulțime mărginită. Fie V vecinătate echilibrată a originii și $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda x_n \in V$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Deoarece $\lambda_n \to 0$, există n_0 astfel încît $|\lambda_n| < \lambda$, $\forall n \geqslant n_0$. Vom avea, pentru $n \geqslant n_0$: $\lambda_n x_n \in V$, ceea ce arată că $\lambda_n x_n \to 0$. $(iii) \Rightarrow (i)$. Să presupunem că A ar fi nemărginită. Deci există o vecinătate V a originii, astfel încît, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, există $x_n \in A$ astfel încît $n^{-1} x_n \notin V$. Aceasta arată că $\{n^{-1} x_n\}$ nu converge la 0, contradicție.

32. a) Fie A mulțime mărginită, V vecinătate echilibrată a originii și $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda A \subseteq V$. Deoarece $\lambda \varepsilon(A) = \varepsilon(\lambda A)$, avem $\lambda \varepsilon(A) = \varepsilon(\lambda A) \subseteq V$, căci V este echilibrată. b) Prin ipoteză, oricare ar fi $|\lambda| \leqslant 1$, avem $\lambda A \subseteq A$. Însă $\lambda \overset{\circ}{A} = \overline{\lambda A} \subseteq \overset{\circ}{A}$, deci $\overset{\circ}{A}$ este echilibrată. Fie A echilibrată. Dacă $\overset{\circ}{A}$ este echilibrată, avem $0 \in \overset{\circ}{A}$. Reciproc, fie $0 \in \overset{\circ}{A}$ și $|\lambda| \leqslant 1$. Dacă $\lambda = 0$, avem $\lambda \overset{\circ}{A} = \{0\} \subseteq \overset{\circ}{A}$. Dacă $\lambda \neq 0$, omotetia fiind homeomorfism, $\lambda A \subseteq A$ implică $\lambda \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{A}$. c) Avem $A \subseteq \overline{\varepsilon(A)}$ iar conform celor de mai sus, $\overline{\varepsilon(A)}$ este echilibrată, ceea ce dovedește incluziunea enunțată. Dacă $A = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, atunci A este închisă, dar $\varepsilon(A)$ diferă de $\overline{\varepsilon(A)}$ prin cele două axe, mai puțin originea (conform fig. 5).

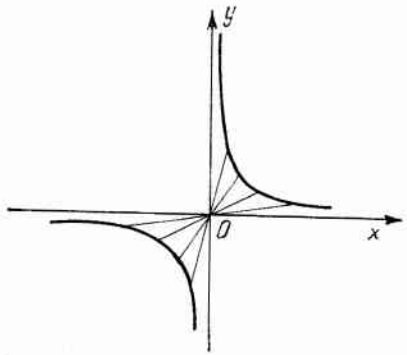

Fig. 5

33. Necesitatea este evidentă. Pentru a nu complica prea mult scrierea, vom demonstra suficiența numai pentru cazul $n = 2$,

transpunerea la cazul general făcîndu-se cu ușurință. Fie $(a, b) \in X_1 \times X_2$ și V o vecinătate a originii în Y. Fie V' astfel încît $V' + V' + V' \subseteq V$. Conform ipotezei, există W_1, W_2 vecinătăți ale originii în X_1, X_2 astfel încît, pentru $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ să avem $f(w_1, w_2) \in V'$. Fie $\delta > 0$ astfel încît $\delta a \in W_1$ și $\delta b \in W_2$. Oricare ar fi $x \in a + \delta W_1$, $y \in b + \delta W_2$, avem: $f(x, y) - f(a,b) = f(x - a, y) + f(a, y - b) = f(\delta w_1, y) + f(a, \delta w_2) = f(\delta w_1, b) + f(\delta w_1, \delta w_2) + f(a, \delta w_2) = f(w_1, \delta b) + f(\delta w_1, \delta w_2) + f(\delta a, w_2)$, unde $w_1 \in W_1$ și $w_2 \in W_2$. Deoarece $f(w_1, \delta b)$, $f(\delta w_1, \delta w_2)$, $f(\delta a, w_2) \in V'$, rezultă că $f(x, y) \in f(a, b) + V$, pentru orice $(x, y) \in \delta W_1 \times \delta W_2$, ceea ce arată continuitatea lui f în (a, b).

34. Oricare ar fi V vecinătate a originii în Y, $f^{-1}(V)$ este vecinătate a originii în X. Dacă $\lambda > 0$ este ales astfel încît $\lambda A \subseteq f^{-1}(V)$ atunci $\lambda f(A) \subseteq V$, ceea ce demonstrează că $f(A)$ este mărginită.

35. Fie $D = \{\lambda \in \Gamma \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ și $f: \Gamma \times X \to X$ definită prin $f(\lambda, x) = \lambda x$. f este continuă, iar D este compact. Din $f(D \times K) = \varepsilon(K)$ (conform ex. 2 a)) rezultă că $\varepsilon(K)$ este mulțime compactă.

36. Să arătăm că $\{M(S, V)\}$ satisface condițiile de la exercițiul 24. Se verifică imediat că: $M(S_3, V_1 \cap V_2) \subseteq M(S_1, V_1) \cap M(S_2, V_2)$, dacă $S_1 \cup S_2 \subseteq S_3$. Dacă $V_1 + V_1 \subseteq V$ atunci $M(S, V_1) + M(S, V_1) \subseteq M(S, V)$. Dacă V este echilibrată, atunci $M(S, V)$ este echilibrată. Pentru ca $M(S, V)$ să fie absorbantă, este necesar și suficient ca, pentru fiecare $f \in G$, să existe $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda f \in M(S, V)$; ceea ce este echivalent cu $\lambda f(S) \subseteq V$, adică cu faptul că $f(S)$ este mărginită în X, pentru orice $S \in \sigma$ și $f \in G$. Prin definiție, $f_n \to 0$ dacă și numai dacă, pentru orice $S \in \sigma$ și orice vecinătate V a originii în X, există $n_{V,S}$ astfel încît, pentru $n \geqslant n_{V,S}$, să avem $f_n \in M(S, V)$, adică $f_n(S) \subseteq V$. Fie X separat și $T = \bigcup_{S \in \sigma} S$, iar $f \in \bigcap M(S, V)$. Deci $f(S) \subseteq V$, oricare ar fi $S \in \sigma$ și V vecinătate a originii. Fie $t \in T$ și $S \in \sigma$ astfel încît $t \in S$. Vom avea $f(t) \in \bigcap V = \{0\}$, adică $f = 0$, ceea ce arată că X^T este separat. Dacă σ este familia părților finite ale lui T, atunci $S \in \sigma$ este de forma $S = \{t_1, \ldots, t_n\}$ deci $M(S, V) = \{f \mid f(t_i) \in V,\ i = \overline{1, n}\} = \prod_{i \in I} V_i$, unde $V_i = V$ dacă $i = \overline{1, n}$ și $V_i = X$ în rest. Comparînd cu definiția topologiei produs pe X^T, afirmația rezultă.

37. $\lambda_n V$ sînt vecinătăți ale originii. Fie U o vecinătate a originii, echilibrată, iar $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda V \subseteq U$. Din $\lambda_n \to 0$ rezultă că există n_0 astfel încît $|\lambda_{n_0}| \leqslant \lambda$, deci $\lambda_{n_0} V \subseteq U$, ceea ce arată că $\{\lambda_n V\}$ este sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Ultima afirmație rezultă din exercițiul 23.

38. Fie A deschisă și conexă prin linii frînte, iar A_1, A_2 deschise, nevide cu $A_1 \cup A_2 = A$. Să fixăm $x \in A_1$, $y \in A_2$ și fie $x_1, \ldots, x_n$ capetele segmentelor care unesc x cu y în A. Definim $f: [0, n + 1] \to A$ prin $f(\lambda) = (1 - \lambda) x + \lambda x_1$ dacă $\lambda \in [0, 1]$; $f(\lambda) = (1 - \lambda) x_i + \lambda x_{i+1}$ dacă $\lambda \in [i, i + 1)$; $f(\lambda) = (1 - \lambda) x_n + \lambda y$ dacă $\lambda \in [n, n + 1]$. Se arată ușor că f este continuă, deci $f^{-1}(A_1)$ și $f^{-1}(A_2)$ sînt deschise, nevide în $[0, n + 1]$ și $f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) = [0, n + 1]$. Deoarece $[0, n + 1]$ este conex, urmează $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \neq \emptyset$, de unde $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, ceea ce arată că A este conexă. Reciproc, fie A conexă și deschisă, iar $a \in A$. Notăm A_0 mulțimea punctelor din A, care pot fi unite cu a printr-o linie frîntă în A. Este suficient să arătăm că $A_0 = A$. Deoarece $a \in A_0$, iar A este conexă, este suficient să arătăm că A_0 este deschisă și închisă în A. Fie $x \in A_0$ și V o vecinătate echilibrată a originii, astfel încît $x + V \subseteq A$. Oricare ar fi $y \in x + V$, avem $[x, y] = \{x + \lambda v \mid \lambda \in [0, 1]\}$, unde

$v = y - x \in V$. V fiind echilibrată, rezultă că $[x, y] \subseteq x + V \subseteq A$, deci y poate fi unit cu x printr-un segment în A, deci cu a printr-o linie frîntă în A. Urmează $x + V \subseteq A_0$, adică $x \in A_0$ și $\overset{\circ}{A}_0$ rezultă deschisă. Fie acum $x \in \overline{A}_0 \cap A$. Oricare ar fi V vecinătate echilibrată a originii cu $x + V \subseteq A$, avem $(x+V) \cap A_0 \neq \emptyset$. Fie $y \in (x + V) \cap A_0$ deci, ca mai sus, $[x, y] \subseteq A$, ceea ce arată că $x \in A_0$, adică A_0 este închisă în A.

39. a) Fie U vecinătate a originii iar V vecinătate echilibrată a originii, astfel încît $V + V \subseteq U$. Există $x_1, \ldots, x_n \in A$ încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$, V fiind absorbantă, există $\lambda \neq 0$ astfel încît $\lambda x_i \in V$, V fiind echilibrată, putem presupune $\lambda \in [0, 1]$, deci $\lambda A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda x_i + V) \subseteq V + V \subseteq U$.

b) Fie A total mărginită, $B \subseteq A$, U vecinătate a originii iar V vecinătate a originii încît $V - V \subseteq U$. Fie $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$. Pentru acei indici i pentru care $(x_i + V) \cap B \neq \emptyset$, fie $y_i \in (x_i + V) \cap B$. Deoarece $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$, cu acei indici de mai sus, avem: $B \subseteq \bigcup (x_i + V) \subseteq \bigcup (y_i + (V - V)) \subseteq \bigcup (y_i + U)$ cu $y_i \in B$. Fie A total mărginită, U vecinătate a originii și $V \subseteq U$ o vecinătate închisă a originii. Dacă $x_1, \ldots, x_n \in A$ și $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$, atunci $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \overline{V}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$. Fie A total mărginită și $\alpha \in \Gamma$. Dacă $\alpha = 0$ atunci $\alpha A = \{0\}$ este total mărginită. Dacă $\alpha \neq 0$ iar U este vecinătate a originii, atunci $\alpha^{-1}U$ este vecinătate a originii. Deci există $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + \alpha^{-1}U)$. Deci $\alpha x_i \in \alpha A$ iar $\alpha A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha x_i + U)$. c) Fie A, B total mărginite, U vecinătate a originii, iar V vecinătate a originii încît $V + V \subseteq U$; fie $x_1, \ldots, x_n \in A$ și $y_1, \ldots, y_m \in B$ încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$ și $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (y_j + V)$. Deoarece $x_i + y_j \in A + B$ iar $A + B \subseteq \bigcup_{i,j} (x_i + y_j + V + V) \subseteq \bigcup_{i,j} (x_j + y_j + U)$, deducem că $A + B$ este total mărginită. Apoi: $A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V) \cup \bigcup_{j=1}^{m} (y_j + V)$ arată că $A \cup B$ este total mărginită. d) Fie A compactă, U vecinătate a originii și $V \subseteq U$ vecinătate deschisă a originii. Deoarece $A \subseteq \bigcup_{x \in A} (x + V)$, există $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$, ceea ce arată că A este total mărginită. e) Fie A total mărginită, U vecinătate a originii în Y. $f^{-1}(U)$ este vecinătate a originii în X, deci există $x_1, \ldots, x_n \in A$ astfel încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + f^{-1}(U))$. Urmează $f(x_i) \in f(A)$ iar:

$f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + f^{-1}(U)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (f(x_i) + U)$ ceea ce arată că $f(A)$ este total mărginită.

40. Fie U vecinătate totală mărginită a originii și $x_1 ..., x_n \in U$ astfel încît $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{2} U\right)$. Să notăm E spațiul liniar finit dimensional, generat de $\{x_1, ..., x_n\}$. Arătăm prin inducție că $U \subseteq 2^{-m} U + E$. Pentru $m = 1$ rezultă din cele de mai sus. Apoi: $2^{-(m+1)} U + E = \frac{1}{2} (2^{-m} U + E) + E \supseteq$ $\supseteq \frac{1}{2} U + E \supseteq U$. Conform exercițiului 37, $\{2^{-m} U\}$ este sistem fundamental de vecinătăți ale originii. Cu relațiile de mai sus și cu exercițiul 14 avem $U \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} (2^{-m} U + E) = \overline{E} = E$, conform exercițiului 20. Pe de altă parte, U este absorbantă, deci $X = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda U$, de unde $X \subseteq E$, adică X este finit dimensional.

41. Dacă A este (total) mărginită, atunci $pr_i(A)$ este (total) mărginită conform exercițiului 31 (respectiv 39 e)). Reciproc, fie $A_i \subseteq X_i$ mărginite, iar U vecinătate a originii în $\prod_{i \in I} X_i$. U poate fi ales de forma $\prod_{i \in I} U_i$, unde $U_i = X_i$ dacă $i \notin \{i_1, ..., i_n\}$, în restul cazurilor U_i fiind vecinătate a originii în X_i. Fie $\lambda_i' > 0$ astfel încît $\lambda_k A_{i_k} \subseteq U_{i_k}$. Notînd $\lambda = \inf \lambda_k$, avem $\lambda \prod_{i \in I} A_i \subseteq$ $\subseteq \prod_{i \in I} U_i = U$ deci $\prod_{i \in I} A_i$ este mărginită. Cum $A \subseteq \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i (A)$, afirmația din enunț rezultă. Fie acum $A_i \subseteq X_i$ total mărginite, iar U ca mai sus. Fie $x_1^i, ... x_{ni}^i \in$ $\in A_i$, încît: $A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_i} (x_k^i + U_i)$. Există $n_{i_1} ... n_{i_n}$ elemente care au pe locul i_k un element de forma $x_j^{i_k}$. Notînd $y_1, ..., y_m$ aceste elemente, avem: $y_k \in \prod_{i \in I} A_i$ și $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} (y_k + U)$, ceea ce arată că $\prod_{i \in I} A_i$ este total mărginită.

42. a) Fie H hiperplan, deci există $x_0 \in X$ și $X_0 \subseteq X$ subspațiu liniar maximal, astfel încît $H = x_0 + X_0$. Apoi există $f \in X^a$ astfel încît $X_0 = \mathrm{Ker}\, f$. În plus, din $X_0 \neq X$ rezultă $f \neq 0$. Notînd $f(x_0) = \alpha$, avem: $H = x_0 + X_0$ $= x_0 + \mathrm{Ker}\ f = x_0 + \{x \mid f(x) = 0\} = \{x + x_0 \mid f(x) = 0\} = \{y \mid f\ (y -$ $- x_0) = 0\} = \{y \mid f(y) = \alpha\}$. Reciproc, fie $f \in X^a \setminus \{0\}$ și să notăm $H =$ $= \{x \mid f(x) = \alpha\}$. $f \neq 0$ implică $f(X) = \Gamma$ deci există $x_0 \in X$ încît $f(x_0) =$ $= \alpha$. Atunci: $H = \{x \mid f(x) = \alpha\} = \{x \mid f(x) = f(x_0)\} = \{x \mid f(x - x_0) = 0\} =$ $= x_0 + \mathrm{Ker}\, f$, iar $\mathrm{Ker}\, f$ este subspațiu liniar maximal, ceea ce arată că H este hiperplan. b) Ținînd seama de cele de mai sus, este suficient să arătăm că $f \in X^a$ este continuu dacă și numai dacă $\mathrm{Ker}\, f$ este închis. Dacă $f \in X'$, atunci $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{0\})$ este închis. Reciproc, fie $\mathrm{Ker}\, f$ închis. Conform exercițiului 30, $X/\mathrm{Ker}\, f$ este s.l.t. separat. $\mathrm{Ker}\, f$ fiind maximal, $X/\mathrm{Ker}\, f$ este de dimensiune 1. Cu exercițiul 20, $X/\mathrm{Ker}\, f$ este izomorf algebric și topologic cu Γ. Dacă $\pi : X \to X/\mathrm{Ker}\, f$ este surjecția canonică, putem de-

fini $g : X/\mathrm{Ker}\, f \to \Gamma$ prin $g(\pi(x)) = f(x)$ iar g este bine definită și continuă. π fiind continuă, f rezultă continuă.

43. a) Din definiție se observă că p_A are valori pozitive (eventual $+\infty$, dacă nu există $\lambda > 0$ încît $\lambda x \in A$). Dacă $\mu = 0$ avem $p_A(\mu x) = p_A(0) = 0 = \mu p_A(x)$ (cu convenția $0 \cdot \infty = 0$). Dacă $\mu > 0$ atunci: $p_A(\mu x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \mu x \in \lambda A\} = \inf\{\lambda \mid x \in \lambda \mu^{-1} A\} = \inf\{\mu\lambda' \mid x \in \lambda' A\} = \mu \inf\{\lambda' > 0 \mid x \in \lambda' \mathbf{A}\} = \mu p_A(x)$. b) Dacă A este absorbantă atunci, pentru fiecare $x \in X$, există $\lambda > 0$ astfel încît $x \in \lambda A$. Deci $p_A(x) < \infty$. c) Conform celor de mai sus, p_A este o aplicație cu valori în $\mathbf{R}$, pozitiv omogenă. Mai avem de arătat că $p_A(x+y) \leqslant p_A(x) + p_A(y)$ Fie $\varepsilon > 0$. Conform definiției, există $\lambda_\varepsilon > 0$ încît $x \in \lambda_\varepsilon A$ și $\lambda_\varepsilon < p_A(x) + \varepsilon$; și $\mu_\varepsilon > 0$ încît $y \in \mu_\varepsilon A$ și $\mu_\varepsilon < p_A(y) + \varepsilon$. A fiind convexă, avem $x + y \in \lambda_\varepsilon A + \mu_\varepsilon A = (\lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon) A$. Rezultă $p_A(x+y) \leqslant \lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon < p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$. Deoarece ε este arbitrar, deducem subaditivitatea lui p_A. d) Fie $x \in A$, dacă există o vecinătate echilibrată a originii V, astfel încît $x + V \subseteq A$. V fiind absorbantă, fie $\lambda > 0$ încît $\lambda x \in V$. Rezultă că $x + \lambda x \in A$, adică $x \in (1+\lambda)^{-1} A$ sau $p_A(x) \leqslant (1+\lambda)^{-1} < 1$. Reciproc, dacă $p_A(x) < 1$, există $\lambda \in (0, 1)$ încît $x \in \lambda A$. Urmează $\lambda^{-1} x \in A$, deci din convexitatea lui A rezultă $[0, \lambda^{-1}x] \subseteq A$. Însă $x \in [0, \lambda^{-1} x]$, căci $x = \lambda(\lambda^{-1} x) + (1-\lambda)\, 0$. Fie acum A închisă. Dacă $p_A(x) \leqslant 1$, există $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to p_A(x)$, $x \in \lambda_n A$. Deci $\lambda_n^{-1} x \in A$ și $\lambda_n^{-1} x \to p_A(x)\, x \in A$, de unde, ca mai sus $x \in A$.

44. Putem presupune $0 \in A$, căci proprietățile care intervin în enunț sînt invariante la translații, iar $A \neq \emptyset$. Fie $M = x_0 + X_1$, cu $X_1 \subseteq X$ subspațiu liniar. Subspațiul liniar X_0 generat de M este $\mathbf{R}x_0 + X_1$; cum $x_0 \notin X_1$ (deoarece altfel ar urma $0 \in M$, în contradicție cu $M \cap A = \emptyset$), urmează că X_1 este maximal în X_0, fiind de codimensiune 1. Deci M este hiperplan în X_0. Există deci $f_0 : X_0 \to \mathbf{R}$ liniară, astfel încît $M = \{x \in X_0 \mid f_0(x) = 1\}$. Să arătăm că $f_0 \leqslant p_A$ pe X_0. Conform exercițiului 43 d), avem $A = \{x \mid p_A(x) < 1\}$. Se observă ușor că X_0 este mulțimea elementelor de forma λy, cu $\lambda \in \mathbf{R}$ și $y \in M$. Însă, pentru $y \in M$, avem $y \notin A$, deci $f_0(y) = 1 \leqslant p_A(y)$. Inegalitatea are loc deci pentru orice element din X_0 de forma λy, cu $\lambda \geqslant 0$. Dacă $\lambda < 0$, avem $f_0(\lambda y) = \lambda < 0 \leqslant p_A(\lambda y)$. Conform teoremei lui Hahn-Banach, există $f : X \to \mathbf{R}$ încît $f|_{X_0} = f_0$ și $f \leqslant p_A$ pe X. A fiind deschisă, a doua relație arată continuitatea lui f, deci $H = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ este hiperplan închis. Din $f|_{X_0} = f_0$ rezultă imediat $M \subseteq H$. În sfîrșit, dacă $x \in H$ atunci $p_A(x) \geqslant 1$, deci $x \notin A$, ceea ce arată că $H \cap A \neq \emptyset$.

45. Fie $A_1 = \overset{\circ}{A} - B$, deci A_1 este deschisă, convexă și nevidă. Din $\overset{\circ}{A} \cap B = \emptyset$ urmează $0 \notin A_1 \cdot M = \{0\}$ este varietate liniară, deci putem aplica exercițiul 44. Rezultă o funcțională liniară continuă $f \in X' \setminus \{0\}$, astfel încît $f(x) > 0$, $\forall x \in A_1$. Să notăm $\alpha = \inf_{x \in \overset{\circ}{A}} f(x)$ și $H = \{x \mid f(x) = \alpha\}$. H este hiperplan închis și, din definiție, avem $f(x) \geqslant \alpha$, $\forall x \in \overset{\circ}{A}$. f fiind continuă, inegalitatea se menține pentru orice $x \in \overline{\overset{\circ}{A}} = \bar{A}$. În sfîrșit, $\forall y \in B$, $\forall x \in \overset{\circ}{A}$, avem $f(x - y) > 0$, deci $f(x) > f(y)$. x fiind arbitrar, deducem $\alpha \geqslant f(y)$, ceea ce arată că H separă A de B. În sfîrșit, demonstrația exercițiului 42 b) arată că orice funcțională liniară continuă nenulă este deschisă, fiind compusa proiecției canonice π cu izomorfismul g. Deci $f(A)$ și $f(B)$ sînt disjuncte, deschise și convexe în $\mathbf{R}$; fie deci $f(A) = (a, b)$ și $f(B) = (c, d)$ cu $b \leqslant c$. Dacă $b \leqslant \lambda \leqslant c$, atunci hiperplanul $H = \{x \mid f(x) = \lambda\}$ separă strict A de B.

46. a) Dacă $A \subseteq X$ este mărginită, deschisă și nevidă, printr-o translație putem presupune, în plus, că $0 \in A$. Există deci B mărginită, deschisă, echilibrată și conținînd 0. Notînd ρ funcționala Minkowski atașată lui B, vom arăta că sînt îndeplinite condițiile. 2) are loc deoarece B este echilibrată. Rezultă, de asemenea, $\rho(0) = 0$. Dacă X este separat și $\rho(x) = 0$, înseamnă că $x \in \bigcap_{\lambda > 0} \lambda B$. Dar B este mărginită, deci $x \in \bigcap V$, deci $x = 0$. B fiind mărginită, $B + B$ este mărginită, deci există $\mu > 0$ astfel încît $B + B \subseteq \mu B$. B fiind echilibrată, oricare ar fi $\lambda \in [0, 1]$, avem $\lambda B + (1 - \lambda) B \subseteq B + B \subseteq \mu B$. Conform definiției, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există $\alpha, \beta > 0$ astfel încît $\rho(x) < \alpha < \rho(x) + \varepsilon$ și $x \in \alpha B$ iar $\rho(y) < \beta < \rho(y) + \varepsilon$ și $y \in \beta B$. Urmează: $x + y \in \alpha B + \beta B = (\alpha + \beta)[\alpha(\alpha + \beta)^{-1} B + \beta(\alpha + \beta)^{-1} B] \subseteq \mu(\alpha + \beta) B$, adică $\rho(x + y) \leqslant \mu(\alpha + \beta) < \mu(\rho(x) + \rho(y)) + 2\mu\varepsilon$, ε fiind arbitrar, se obține 3). În sfîrșit, B fiind deschisă, avem $S(1) = B$, ceea ce arată că $S(\varepsilon)$ sînt vecinătăți ale originii. Avînd în vedere exercițiul 37, rezultă că $\{S(\varepsilon)\}$ formează sistem fundamental de vecinătăți ale originii. b) Reciproc, dacă ρ are proprietățile 1)—3) atunci 3) garantează continuitatea sumei, iar 2) continuitatea înmulțirii cu scalari. 1) arată că X este separat. În sfîrșit, $S(1)$ este mărginită, deschisă și nevidă.

47. a) 1) și 2) sînt evidente, iar 3) rezultă din exercițiul 50. Deci $L^p([0,1])$ devine s.l.t. separat, local mărginit. b) Fie $\varphi : L^p([0, 1]) \to \mathbf{R}$ liniară și continuă. Presupunînd prin absurd $\varphi \neq 0$, există $f \in L^p([0, 1])$ astfel încît $\varphi(f) = \alpha > 0$, iar $\rho(f) = 1$. Deci $\int_0^1 |f(t)|^p \, dt = 1$, ceea ce arată că, pentru fiecare $n \geqslant 1$ și $0 \leqslant k \leqslant n$, există $s_n^k \in [0, 1]$ unic, încît $\int_0^{s_n^k} |f(t)|^p \, dt = \frac{k}{n}$, deoarece funcția $s \to \int_0^s |f(t)|^p \, dt$ este monotonă și continuă. Avem $0 = s_n^0 < s_n^1 < \ldots < s_n^{n-1} < s_n^n = 1$ și $\varphi(s_n^k) - \varphi(s_n^{k-1}) = n^{-1}$. Să notăm: $g_n^k(t) = f(t)$ dacă $t \in [s_n^{k-1}, s_n^k]$ și $g_n^l(t) = 0$ în rest. Avem $f = \sum_{k=1}^n g_n^k$ și $\alpha = \varphi(f) = \sum_{k=1}^n \varphi(g_n^k)$. Urmează că putem alege $k_n \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încît $\varphi(g_n^{k_n}) \geqslant \alpha n^{-1}$. Notînd $h_n = n g_n^{k_n}$, avem $\varphi(h_n) \geqslant n(\alpha n^{-1}) = \alpha$ iar $\rho(h_n) = \left[\int_0^1 |n g_n^{k_n}(t)|^p \, dt\right]^{1/p} = n\left[\int_{s_n^{k_n-1}}^{s_n^{k_n}} |f(t)|^p \, dt\right]^{1/p} = n \cdot n^{-1/p} = n^{1-1/p}$ deci $\lim_{n \to \infty} \rho(h_n) = 0$, ceea ce contrazice continuitatea lui φ. c) Presupunînd $\mu \leqslant 1$, spațiul $L^p([0, 1])$ ar fi normat, iar pe orice spațiu normat $\neq \{0\}$ există funcționale liniare continue, neidentic nule, ceea ce contrazice punctul precedent.

48. Dacă $f \in X'$, există o vecinătate deschisă V a originii, astfel încît $|f(x)| < 1$, $\forall x \in V$. Reciproc, dacă $f \in X^a$ este mărginită inferior pe o mulțime, $(-f)$ este mărginită superior pe acea mulțime, deci este suficient să considerăm doar acest caz. Fie $A \subseteq X$ deschisă, nevidă și $M \in \mathbf{R}$ încît $f(x) \leqslant M$, $\forall x \in A$. Fie $a \in A$, $\varepsilon > 0$ și $A_1 = (A - a) \cap (a - A)$. A_1 este deschisă și nevidă, deoarece $0 \in A_1$. Dacă $y \in \frac{\varepsilon}{2M} A_1$ atunci $f(y) = f\left(\frac{\varepsilon}{2M}(x - a)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}(f(x) - f(a)) < \varepsilon$ și $f(y) = f\left(\frac{\varepsilon}{2M}(a - x')\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{2M}(f(a) - f(x')) > -\varepsilon$, ceea ce dovedește continuitatea lui f în origine. Dacă X este complex, avem $|f(x)| \leqslant$

$\leqslant M$, $\forall x \in A$, deci dacă $y \in \frac{\varepsilon}{2M}(A - a) \cap (a - A)$ avem $|f(y)| < \varepsilon$ și, din nou, f rezultă continuă în origine. |

49. Dacă $X' \neq \{0\}$, fie $f \neq 0$, $f \in X'$. Notînd $A = f^{-1}((-1, 1))$, A este deschisă, convexă și nevidă ($(-1, 1)$ se înlocuiește cu $\{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ dacă X este complex). $A \neq X$ rezultă din $f \neq 0$. Reciproc, dacă A este deschisă, convexă, nevidă și diferită de X, printr-o translație putem presupune $0 \in A$. p_A este deci funcțională convexă, neidentic nulă. Alegînd $a \in X$ încît $p_A(a) \neq \neq 0$, există $f_0 \in X^a$ încît $f_0 \leqslant p_A$ pe X și $f_0(a) = p_A(a)$. Pentru orice $x \in A \cap \cap (-A)$, avem $|f(x)| < 1$ deci, din exercițiul 48, f este continuă și $f \neq 0$.

50. Prima inegalitate este bine cunoscută. Fie $f(x) = (x + a)^q - 2^{q-1}(x^q + + a^q)$ cu $q = p^{-1} > 1$. Avem $f'(x) = q[(x + a)^{q-1} - 2^{q-1}x^{q-1}]$ deci $f'(x) = 0$ numai pentru $x = a$, care este punct de minim. Rezultă $(x + a)^q \leqslant 2^{q-1}(x^q + + a^q)$. Utilizînd prima inegalitate și luînd $x = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt$; $y = \int_0^1 |g(t)|^p dt$, găsim: $\left[\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p \, dt\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_0^1 (|f(t)|^p + |g(t)|^p) \, dt\right]^{1/p} \leqslant$ $\leqslant 2^{1/p-1}\left[\left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p \, dt\right)^{1/p}\right]$.

51. Această teoremă aparține lui V. Klee jr. [16] și răspunde unei probleme a lui Banach. Fie X un spațiu liniar topologic, complet față de o metrică invariantă la translații. Fie d o metrică invariantă la translații pe X, iar (X^*, d^*) completatul lui (X, d). Se știe că X este G_δ dens în X^*, deci există un șir X_n de mulțimi deschise, dense în X^*, astfel încît $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Rezultă că $X^* \setminus X$ este de prima categorie. Dacă ar exista $x \in X^* \setminus X$, atunci $x + X \subseteq X^* \setminus X$ deci $x + X$ și prin urmare și X ar fi de prima categorie; absurd, căci X^* este complet. Deci $X = X^*$ și X rezultă complet pentru d.

52. a) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aditivă. Prin inducție, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem $f(nx) = = nf(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Apoi: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, de unde $f(0) = 0$. De aici $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ deci $f(-x) = -f(x)$. Din nou, prin inducție, pentru orice $k \in \mathbf{Z}$, avem $f(kx) = kf(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Dacă $n \in \mathbf{N}$, avem $f(x) = f(n \cdot n^{-1}x) = nf(n^{-1}x)$, adică $f(n^{-1}x) = n^{-1}f(x)$. Combinînd cu rezultatele de mai sus, deducem $f(rx) = rf(x)$, $\forall r \in \mathbf{Q}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci f este $\mathbf{Q}$-liniară. b) $\mathbf{R}$ este spațiu $\mathbf{Q}$-liniar, deci există o bază algebrică $\{e_i\}$ în $\mathbf{R}$ peste $\mathbf{Q}$. Deoarece $\mathbf{R}$ este nenumărabil, $\{e_i\}$ este infinită (nenumărabilă). Definind $f(e_i) = 1$ și aplicînd exercițiul I. 1, obținem o aplicație aditivă, deci $\mathbf{Q}$-liniară, care nu este continuă. ∎

53. a) Suma aplicațiilor $x \to x_1$ și $x \to x_2$ este identitatea, deci continuitatea uneia din ele este echivalentă cu continuitatea celeilalte. b) Aplicația canonică $X/X_1 \to X_2$ este definită prin $x + X_1 \to x_2$. Definiția este corectă: dacă $x + X_1 = y + X_1$, rezultă $x - y \in X_1$, adică $x_2 = y_2$. Această aplicație este liniară. Din $x_2 = y_2$ urmează $x - y \in X_1$, adică aplicația este injectivă. Dacă $x \in X_2$, atunci $x + X_1 \to x$ deci aplicația este surjectivă. Inversa ei este $x \to x + X_1$, care este continuă, fiind compusa incluziunii canonice $X_2 \to X$ cu proiecția canonică $X \to X/X_1$. Avem atunci echivalențele: ($x \to x_1$ este continuă) $\Leftrightarrow$ ($x \to x_2$ este continuă) $\Leftrightarrow$ ($x + X_1 \to x_2$ este continuă) $\Leftrightarrow$ ($X/X_1 \to X_2$ este izomorfism de s.l.t.).

54. Scrierea $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$ fiind unică, $X_1 \oplus X_2$ este suma directă algebrică a subspațiilor $\varepsilon_1(X_1)$ și $\varepsilon_2(X_2)$. Aplicația $(x, y) \to (x, 0)$ fiind compusa proiecției $(x, y) \to x$ cu ε_1, este continuă.

55. *a*) Avem: $(\lambda + i\mu) \cdot (x + y) = \lambda(x + y) + \mu u(x + y) = [\lambda x + \mu u(x)] + [\lambda y + \mu u(y)] = (\lambda + i\mu) \cdot x + (\lambda + i\mu) \cdot y$; $[(\lambda + i\mu) + (\lambda_1 + i\mu_1)] \cdot x = [(\lambda + \lambda_1) + i(\mu + \mu_1)] \cdot x = (\lambda + \lambda_1)x + (\mu + \mu_1)u(x) = (\lambda x + \mu u(x)) + (\lambda_1 x + \mu_1(u)(x)) = (\lambda + i\mu) \cdot x + (\lambda_1 + i\mu_1) \cdot x$; $1 \cdot x = x$; $[(\lambda + i\mu)(\lambda_1 + i\mu_1)] \cdot x = [(\lambda\lambda_1 - \mu\mu_1) + i(\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu)] \cdot x = (\lambda\lambda_1 - \mu\mu_1)x + (\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu)u(x)$ iar: $(\lambda + i\mu)[(\lambda_1 + i\mu_1) \cdot x] = (\lambda + i\mu)[\lambda_1 x + \mu_1 u(x)] = (\lambda + i\mu)\lambda_1 x + (\lambda + i\mu)\mu_1 u(x) = \lambda\lambda_1 x + \lambda_1\mu u(x) + \lambda\mu_1 u(x) - \mu\mu_1 u^2(x) = (\lambda\lambda_1 - \mu\mu_1)x + (\lambda_1\mu + \lambda\mu_1)u(x)$, ceea ce arată că X este spațiu liniar complex. Continuitatea înmulțirii cu scalari urmează din continuitatea lui u, deci X este s.l.t. complex. Reciproc, dacă X este s.l.t. complex, să definim $u : X \to X$ prin $u(x) = ix$. Avem, evident, $u \circ u = -1_X$, ceea ce se poate scrie $u \circ (-u) = (-u) \circ u = 1_X \cdot u$ fiind continuu, relația de mai sus arată că u este izomorfism algebric și topologic.

b) Fie $u : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^{2n+1}$ încît $u \circ u = -1_X$. Polinomul caracteristic al lui u este de grad $2n + 1$, deci are cel puțin o rădăcină reală. Pe de altă parte, $\lambda^2 + 1$ este polinom anulator pentru u, contradicție.

c) u astfel definit este evident liniar și bijectiv. Avem $u(u(x, y)) = u(-y, x) = (-x, -y) = -(x, y)$ deci sînt satisfăcute proprietățile indicate. Avem $(\lambda + i\mu)(x, y) = \lambda(x, y) + \mu u(x, y) = (\lambda x, \lambda y) + (-\mu y, \mu x) = (\lambda x - \mu y, \lambda y + \mu x)$. Dacă $X = \mathbf{R}^n$ atunci $X \times X = \mathbf{R}^{2n}$ iar înmulțirea cu elemente din $\mathbf{C}$ va fi: $(\lambda + i\mu)(x_1, \ldots, x_{2n}) = (\lambda x_1 - \mu x_{n+1} \ldots, \lambda x_n - \mu x_{2n}, \lambda x_n + \mu x_1, \ldots, \lambda x_{2n} + \mu x_n)$, adică se identifică $\mathbf{R}^{2n} \simeq \mathbf{C}^n$ prin $(x, y) \to x + iy$, cu $x, y \in \mathbf{R}^n$.

56. Fie $f : X \to \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$-liniară și continuă, iar $g(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $h(x) = \operatorname{Im} f(x)$. Avem $f = g + ih$ iar g și h sînt, evident, aditive. Dacă $\lambda \in \mathbf{R}$ atunci $g(\lambda x) = \operatorname{Re} f(\lambda x) = \operatorname{Re} \lambda f(x) = \lambda \operatorname{Re} f(x) = \lambda g(x)$ și $h(\lambda x) = \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} \lambda f(x) = \lambda \operatorname{Im} f(x) = \lambda h(x)$. Fie $f_1, f_2 \in (X')_0$ iar $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Avem $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = \lambda_1(g_1 + ih_1) + \lambda_2(g_2 + ih_2) = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) + i(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)$ deci φ este liniară. Să observăm că $g(ix) = \operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re} if(x) = -\operatorname{Im} f(x) = -h(x)$. Deci din $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ urmează $h_1 = h_2$, adică $f_1 = f_2$, ceea ce arată că φ este injectivă. În sfîrșit, dacă $g \in (X_0)'$, fie $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Deoarece $f(ix) = g(ix) - ig(-x) = ig(x) + g(ix) = i[g(x) - ig(ix)] = if(x)$ rezultă că f este $\mathbf{C}$-liniară și continuă. Din definiție, este evident că $\varphi(f) = g$ deci φ este surjectivă.

57. Fie $\{e_i\}_{i \in I}$ o bază algebrică pentru X, astfel încît $e_i \in A$, $\forall\, i \in I$. A fiind echilibrată, $0 \in A$. Fie $x \neq 0$ și $x = \Sigma \lambda_i e_i$ descompunerea în baza considerată. Să notăm $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$, deci J este finită și nevidă. Pentru $i \in J$, fie $f_i = \lambda_i |\lambda_i|^{-1} e_i$ și $\alpha = \sum_{i \in J} |\lambda_i|$. Avem $\alpha > 0$ și $x = \alpha \sum_{i \in J} |\lambda_i| \alpha^{-1} f_i$. Deoarece $|\lambda_i| \alpha^{-1} \geqslant 0$. $\sum_{i=J} |\lambda_i| \alpha^{-1} = 1$ și $f_i \in A$ (căci A este echilibrată), rezultă $\alpha^{-1} x \in A$, ceea ce arată că A este absorbantă.

58. d este bine definită, seria considerată fiind convergentă. Dacă $d((\lambda_n), (\mu_n)) = 0$ urmează $|\lambda_n - \mu_n| = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, adică $\lambda_n = \mu_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, deci $(\lambda_n) = (\mu_n)$. Este evident că $d((\lambda_n), (\mu_n)) = d((\mu_n), (\lambda_n))$. Dacă $a, b \geqslant 0$, se verifică prin calcul direct că $\dfrac{a + b}{1 + a + b} \leqslant \dfrac{a}{1 + a} + \dfrac{b}{1 + b}$, deci d satisface

axioma triunghiului. Deoarece $d((\lambda_n)+(\nu_n), (\mu_n)+(\nu_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|(\lambda_n+\nu_n)-(\mu_n+\nu_n)|}{1+|(\lambda_n+\nu_n)-(\mu_n+\nu_n)|} = d((\lambda_n), (\mu_n))$, rezultă că d este invariantă la translații. Ultimele afirmații vor rezulta, dacă mai arătăm că s este homeomorf cu $\Gamma^{\mathbf{N}}$, înzestrat cu topologia produs. Fie V o vecinătate a originii în $\Gamma^{\mathbf{N}}$, deci există $V_n \subseteq \Gamma$ $(n \in \mathbf{N})$ astfel încît $\sum_{n\in\mathbf{N}} \Pi V_n \subseteq V$; $V_n = \Gamma$ dacă $n \notin \{n_1, ..., n_p\}$ și $\{\lambda \mid |\lambda| < \delta_{n_k}\} \subseteq V_{n_k}$ $(k = 1, ..., p)$. Fie $\delta = \min \delta_{n_k}$ și $n_0 = \max n_k$. Notînd $\varepsilon = \delta 2^{-n_0-2}$, avem $S(\varepsilon) \subseteq V$. În adevăr, dacă $d((\lambda_n), 0) < \varepsilon$, urmează $\frac{|\lambda_{n_k}|}{1+|\lambda_{n_k}|} < 2^{n_k}\varepsilon$ $(k = 1, ..., p)$, de unde $|\lambda_{n_k}| < \delta \leqslant \delta_{n_k}$, ceea ce arată că $(\lambda_n) \in V$. Invers, fie $\varepsilon > 0$; notăm $n_0 \in \mathbf{N}$ un număr cu proprietatea că $2^{-n_0+2} < \varepsilon$. Fie $\delta = \varepsilon/2n_0$ și fie $V_n = \Gamma$ pentru $n \geqslant n_0$, iar $V_n = \{\lambda \mid |\lambda| < \delta\}$ pentru $n < n_0$. Să arătăm că $\prod_{n\in\mathbf{N}} V_n \subseteq S(\varepsilon)$. Dacă $|\lambda_n| < \delta$ pentru orice $n < n_0$, urmează $\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\lambda_n|}{1+|\lambda_n|} \leqslant 2^{-n_0+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$, ceea ce arată că $d((\lambda_n), 0) < \varepsilon$

b) Fie f de forma indicată și $\varepsilon > 0$. Notînd $\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{n_0} |\alpha_n|$, fie $\delta = \varepsilon 2^{-n_0-1}\alpha^{-1}$. Dacă $d((\lambda_n), 0) < \delta$, urmează că $|\lambda_n| < \varepsilon\alpha^{-1}$ pentru orice $n \leqslant n_0$, de unde $|f((\lambda_n))| = |\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n\lambda_n| \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} |\alpha_n||\lambda_n| < \varepsilon$. Reciproc, fie $f : s \to \Gamma$ liniară și continuă. Fie $\delta > 0$ astfel încît $d((\lambda_n), 0) < \delta$ să implice $|f((\lambda_n))| < 1$. Fie $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $2^{-n_0} < \delta$. Orice șir $(\lambda_n) \in s$ pentru care $\lambda_n = 0$, $\forall n \leqslant n_0$, satisface atunci $d((\lambda_n), 0) < \delta$. Deoarece f este omogenă, în mod necesar $f((\lambda_n)) = 0$. Fie acum $e_k : \mathbf{N} \to \Gamma$ șirul definit prin $e_k(n) = \delta_{nk}$ și să notăm $f(e_k) = \alpha_k$. Dacă $(\lambda_n) \in s$ este un șir oarecare, putem scrie: $(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n e_n + (\mu_n)$, unde $\mu_n = 0$ pentru $n \leqslant n_0$. Din cele de mai sus: $f((\lambda_n)) = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n f(e_n) + f((\mu_n)) = \sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n\lambda_n$.

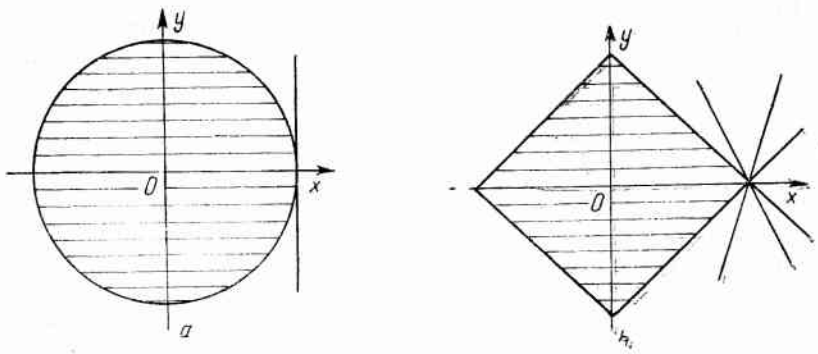

Fig. 6.

59. În ambele cazuri, A este mulțime convexă; M este varietate liniară, ca translată a originii. Evident, $A \cap M = \emptyset$ deci ipotezele sînt îndeplinite (conform fig. 6. *a*, *b*). În primul caz, există un singur hiperplan, și anume dreapta de ecuație $x = 1$. În al doilea caz, există o infinitate de hiperplane, și anume dreptele de ecuație $x + \alpha y = 1$, cînd $\alpha \in [-1, 1]$.

60. Se știe că T_2 implică întotdeauna T_0. Reciproc, să presupunem că s.l.t. X satisface T_0 și fie $x \in X$, $x \neq 0$. Atunci există: fie o vecinătate a lui 0, care nu conține pe x; fie o vecinătate a lui x, care nu conține 0. În primul caz, $x \notin \bigcap_{V \in \mathcal{O}} V$, $\mathcal{O}$ fiind sistemul vecinătăților originii. În al doilea caz, există $V \in \mathcal{O}$ încît $0 \notin x + V$. Dacă $W \in \mathcal{O}$ este o vecinătate simetrică cu $W \subseteq V$, deducem $0 \notin x + V$, adică $(-x) \notin W$ sau $x \notin W$, ceea ce arată că, și în acest caz, $x \notin \bigcap_{V \in \mathcal{O}} V$. Conform exercițiului 12, X rezultă separat.

61. T fiind continuu, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încît $d(x, 0) < \delta$ implică $d'(Tx, 0) < \varepsilon$. Fie acum $x_1, x_2 \in X$ cu $d(x_1, x_2) < \delta$. Deoarece $d(x_1 - x_2, 0) = d(x_1, x_2)$, urmează $d'(T(x_1 - x_2), 0) < \varepsilon$. Dar $d'(T(x_1 - x_2), 0) = d'(Tx_1, Tx_2)$, ceea ce demonstrează continuitatea uniformă a lui T.

IV. SPAȚII LOCAL CONVEXE

1. Dacă $x, y \in s$ și $\lambda \in \Gamma$, avem: $p_n(\lambda x) = |\lambda x_1| + \ldots + |\lambda x_n| = |\lambda| (|x_1| + \ldots + |x_n|) = |\lambda| p_n(x)$; $p_n(x + y) = |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \leqslant (|x_1| + \ldots + |x_n|) + (|y_1| + \ldots + |y_n|) = p_n(x) + p_n(y)$, ceea ce arată că p_n este o seminormă pe s. Apoi: $p_n(x) = |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}| = p_{n+1}(x)$, ceea ce arată că $\{p_n\}$ este o familie filtrantă. Fie $x \in s$, $x \neq 0$. Există deci n_0 astfel încît $x_{n_0} \neq 0$. În acest caz avem: $p_{n_0}(x) = |x_1| + \ldots + |x_n| \geqslant |x_{n_0}| > 0$, deci familia $\{p_n\}$ este suficientă. Să mai considerăm $q_n(x) = |x_n|$. Se verifică imediat că q_n este o seminormă pe s. Apoi: $q_n(x) \leqslant p_n(x) = q_1(x) + \ldots + q_n(x)$, ceea ce arată familia $\{q_n\}$ induce aceeași topologie pe s, ca și familia $\{p_n\}$. Ținînd seama de definiția topologiei induse de o familie de seminorme, rezultă că topologia definită de familia $\{p_n\}$ coincide cu topologia definită de distanța din exercițiul III.58. Fie $x^k \in s$ un șir convergent la 0. Deci, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, avem: $|x_n^k| \leqslant p_n(x_n^k) \to 0$ pentru $k \to +\infty$. Rezultă că $\lim_{k \to \infty} x_n^k = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Reciproc, să presupunem că această ultimă condiție este îndeplinită. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ avem: $p_n(x_n^k) = |x_1^k| + \ldots + |x_n^k| \to 0$ pentru $k \to +\infty$, ceea ce arată că $x^k \to 0$ în s.

2. Să notăm, pentru fiecare $t \in [0, 1]$, $p_t(f) = |f(t)|$, unde $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Deoarece $p_t(\lambda f) = |\lambda f(t)| = |\lambda| p_t(f)$ și $p_t(f + g) = |f(t) + g(t)| \leqslant p_t(f) + p_t(g)$ rezultă că p_t este o seminormă pe $\mathcal{C}([0, 1])$. Dacă $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ și $f \neq 0$, există $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $f(t_0) \neq 0$, adică $p_{t_0}(f) \neq 0$. Urmează că $\{p_t\}_{t \in [0, 1]}$ este o familie suficientă de seminorme pe $\mathcal{C}([0, 1])$. Să arătăm că

topologia definită de această familie de seminorme este topologia convergenței punctuale. Fie $f_\delta \to 0$ un șir generalizat din $\mathcal{C}([0, 1])$, convergent punctual la 0. Deci $f_\delta(t) \to 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Urmează $p_t(f_\delta) \to 0$, $\forall t \in [0, 1]$ deci $f_\delta \to 0$ în topologia dată de $\{p_t\}_{t \in [0, 1]}$.

3. Verificăm că sînt îndeplinite condițiile din exercițiul III.24. Deoarece $\mathcal{U}$ este format din mulțimi convexe, echilibrate și absorbante, topologia considerată va fi local convexă. Condițiile (*i*) și (*iii*) sînt verificate direct. Fie $V \in \mathcal{U}$ și să notăm $V_1 = 1/2\,V$. Conform (*ii*) avem $V_1 \in \mathcal{U}$. Deoarece V este convexă, $V_1 + V_1 = 1/2\,V + 1/2\,V \subseteq V$, ceea ce încheie demonstrația.

4. a) Orice topologie local convexă are un sistem fundamental de vecinătăți ale originii, format din mulțimi convexe, echilibrate și absorbante. Fie A o mulțime convexă, echilibrată și absorbantă, iar p_A seminorma atașată. Conform definiției lui τ_s, urmează că $\{x \in X \mid p_A(x) < 1\}$ este vecinătate a originii. Incluziunea $\{x \in X \mid p_A(x) < 1\} \subseteq A$ arată că A este vecinătate a originii în τ_s. b) Ținînd seama de a) și de faptul că orice topologie local convexă are un sistem fundamental de vecinătăți ale originii, format din mulțimi convexe, echilibrate și absorbante, afirmația rezultă. c) Vom arăta continuitatea lui f în origine. Fie V vecinătate a originii în Y. Putem alege $U \subseteq V$, astfel încît U să fie vecinătate convexă și echilibrată a originii. $f^{-1}(U)$ este deci mulțime convexă, echilibrată și absorbantă; deci vecinătate a originii în τ_s. d) Topologia uzuală pe Γ^n este local convexă, deci mai puțin fină ca τ_s. Invers, fie $A \subseteq \Gamma^n$ o mulțime convexă, echilibrată și absorbantă. Notăm $\| x \| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_n |$, iar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza canonică în Γ^n. Există $\lambda_i > 0$ astfel încît $\mu e_i \in A$, dacă $| \mu | < \lambda_i$. Notînd $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} | \lambda_i |$, avem $\varepsilon > 0$.

Oricare ar fi $x \in \Gamma^n$ cu $\| x \| < n^{-1}\varepsilon$, avem $| x_i | < n^{-1}\varepsilon$, adică $n x_i e_i \in A$. Din faptul că A este convexă urmează $x = n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} n x_i e_i \in A$, ceea ce arată că $\{x \in X \mid \| x \| < n^{-1}\varepsilon\} \subseteq A$.

5. Prin definiție, $f_i \to f$ dacă și numai dacă $p_K(f_i - f) \to 0$, pentru fiecare $K \subseteq X$ finită; sau, echivalent: $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |(f_i - f)(x_j)| \to 0$, pentru $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Însă aceasta revine la $f_i(x) \to f(x)$, $\forall\, x \in X$, deci topologia considerată este topologia convergenței punctuale. Dacă $f \in \mathcal{C}(X)$, $f \neq 0$, există $x_0 \in X$ astfel încît $f(x_0) \neq 0$, deci $p_{\{x_0\}}(f) \neq 0$, ceea ce arată că familia considerată este suficientă. Dacă K_1, K_2 sînt părți finite, atunci $K_1 \cup K_2$ este finită, iar $p_{K_1} \leqslant p_{K_1 \cup K_2}$, $p_{K_2} \leqslant p_{K_1 \cup K_2}$, deci familia considerată este filtrantă.

6. a) Este o reformulare a teoremei lui Weierstrass [2, t.1—1, pag. 221]: „Orice șir Cauchy din $H(\Omega)$ este convergent în $H(\Omega)$". b) Este o reformulare a principiului lui Montel [2, t.1—6, pag. 227]: „Dacă f_n este un șir mărginit din $H(\Omega)$, atunci există un subșir al său, convergent în $H(\Omega)$".

7. a) Fie $\{K_n\}$ un șir de mulțimi compacte avînd proprietățile din exercițiul I.20. Familia $\{p_{K_n}\}$ definește aceeași topologie ca și familia $\{p_K\}$. În adevăr, această topologie este mai puțin fină. Invers, pentru fiecare K există n_0 încît $K \subseteq K_{n_0}$, ceea ce arată că avem $p_K \leqslant p_{K_{n_0}}$. Familia $\{p_{K_n}\}$ fiind numărabilă, crescătoare și suficientă, topologia considerată este metrizabilă. Fie $\{f_n\}$ șir Cauchy în $\mathcal{C}(X)$ și $\varepsilon > 0$. Putem găsi N, astfel încît, n_0 fiind

fixat, să avem: $\rho(f_n, f_m) < \varepsilon 2^{-n_0}$, $\forall n, m \geqslant N$. În particular: $2^{-n_0} \frac{p_{n_0}(f_n - f_m)}{1 + p_{n_0}(f_n - f_m)} < \varepsilon \cdot 2^{-n_0}$, de unde urmează că, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ și n_0, există N, încît pentru orice m, $n \geqslant N$ să avem $p_{K_{n_0}}(f_n, f_m) < \varepsilon$. Deci $f_n|_{K_{n_0}}$ este șir Cauchy în $\mathcal{E}(K_{n_0})$. Acest spațiu fiind complet, există $f \in \mathcal{E}(K_{n_0})$ încît $f_n|_{K_{n_0}} \to f$ uniform pe K_{n_0}. Această construcție fiind valabilă pentru fiecare n_0, putem considera că f este definită și continuă pe X. Deoarece $p_{K_{n_0}}(f_n - f) \to 0$, $\forall n_0$, rezultă că $\rho(f_n - f) \to 0$, deci $\mathcal{E}(X)$ este complet. b) Familia $\{p_K\}$ fiind crescătoare, este suficient să arătăm că fiecare $\{f \mid p_{K_n}(f) < 1\}$ este nemărginită. Fie $x \notin K_n$ și m încît $x \in K_m$. Există $f_\lambda \in \mathcal{E}(X)$ astfel încît $f_\lambda(x) = \lambda$, $f_\lambda(y) = 0$, $\forall y \in K_n$ și $0 \leqslant f_\lambda \leqslant \lambda$. Evident, $f_\lambda \in \{f \mid p_{K_n}(f) < 1\}$. De aici rezultă că nu există $\mu > 0$ încît $\mu\{f \mid p_{K_n}(f) < 1\} \subseteq \{f \mid p_{K_m}(f) < 1\}$, deci vecinătatea considerată nu este mărginită.

8. Utilizăm exercițiul 3. Fie A_1, $A_2 \in \mathcal{U}$, deci $A_1 \cap X_i$ și $A_2 \cap X_i$ sînt vecinătăți ale originii în X_i. Urmează că $(A_1 \cap A_2) \cap X_i$ este vecinătate a originii în X_i, de unde $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$. Dacă $A \in \mathcal{U}$, fie $A_1 = 1/2A$. Din faptul că A este convexă urmează că $A_1 + A_1 \subseteq A$, iar $(1/2\,A) \cap X_i = 1/2\,(A \cap X_i)$ arată că $A_1 \in \mathcal{U}$. Prin construcție, fiecare $A \in \mathcal{U}$ este absorbantă, echilibrată și convexă, de unde existența și unicitatea topologiei limită inductivă. Dacă $f : X \to Y$ este liniară și fiecare $f|_{X_i}$ este continuă, rezultă că, pentru fiecare vecinătate a originii U în Y, avem: $(f|_{X_i})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap X_i$ vecinătate a originii în X_i. Din definiția topologiei limită inductivă, urmează că $f^{-1}(U)$ este vecinătate a originii în X, adică f este continuă. Topologia limită inductivă este cea mai puțin fină topologie pe X, pentru care incluziunile canonice $X_i \to X$ sînt continue și încît orice funcție liniară $f : X \to Y$, astfel încît $f|_{X_i}$ să fie continuă, este continuă (Y s.l.c.). În adevăr, fie τ o topologie cu proprietatea de mai sus, iar τ_i topologia limită inductivă. Aplicația identică $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau_i)$ satisface $1_X|_{X_i}$ continuă, deci este continuă, adică τ este mai fină ca τ_i. Conform celor de mai sus, τ_i are proprietatea indicată, de unde afirmația.

9. a) Fie K_1, K_2 compacte din Ω. Este evident că $\mathcal{E}_0^\infty(K_i, \Omega) \subseteq \mathcal{E}_0^\infty(K_1 \cup K_2, \Omega)$ $(i = 1, 2)$, iar $K_1 \cup K_2$ este compact. Deci familia de subspații considerată este filtrantă. Fie $f \in \mathcal{E}_0^\infty(\Omega)$ și $K = \operatorname{supp} f$. Prin ipoteză, K este compact și, evident, $f \in \mathcal{E}_0^\infty(K, \Omega)$, ceea ce arată că $\mathcal{E}_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subseteq \Omega \\ K \text{compact}}} \mathcal{E}_0^\infty(K, \Omega)$. În sfîrșit, dacă $K_1 \subseteq K_2$, avem: $p_{K,m}(f) = p_{K \cap K_1, m}(f)$, oricare ar fi $K \subseteq K_2$ compact și $m \in \mathbf{N}$. Această relație demonstrează continuitatea incluziunii $\mathcal{E}_0^\infty(K_1, \Omega) \to \mathcal{E}_0^\infty(K_2, \Omega)$. b) Fie $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu proprietățile a) și b), atunci $f_n \to 0$ în $\mathcal{E}_0^\infty(K, \Omega)$ pentru fiecare compact $K \subseteq \Omega$, deci cu atît mai mult $f_n \to 0$ în $\mathcal{D}(\Omega)$. Reciproc, dacă $f_n \to 0$ în $\mathcal{D}(\Omega)$ și a) nu ar fi îndeplinit; fie $\{K_n\}$ o exhaustiune cu compacte a lui Ω (conform ex. I.20). Există deci $x_p \in K_p \setminus K_{p-1}$ și $n_p \in \mathbf{N}$ încît $f_{n_p}(x_p) \neq 0$. Notînd: $s(f) = \sum_{p=1}^{\infty} \sup_{x \in K_p \setminus K_{p-1}} \left| \frac{f(x)}{f_{n_p}(x_p)} \right|$, $V = \{f \mid s(f) \leqslant 1/2\}$, s este o normă pe $\mathcal{D}(\Omega)$, deci V este echilibrată și convexă. Orice $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ fiind continuă și cu suport compact, rezultă că V este absorbantă. În sfîrșit, fie $K \subseteq \Omega$ compact și $n \in \mathbf{N}$ încît $K \subseteq K_n$. Pentru $f \in \mathcal{E}_0^\infty(K, \Omega)$ avem: $s(f) = \sum_{p=1}^{n} \sup_{x \in K_p \setminus K_{p-1}} \left| \frac{f(x)}{f_{n_p}(x_p)} \right|$, ceea ce arată că

$V \cap \mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$ este vecinătate a originii în $\mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$. Conform definiției, V este vecinătate a originii în $\mathcal{D}(\Omega)$. Dar $f_{n_p} \notin V$, ceea ce contrazice $f_n \to 0$. Deci a) este îndeplinită. Rezultă că $f_n \to 0$ în $\mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$, ceea ce se traduce prin b).

10. a) Conform exercițiului 8, f este continuă dacă și numai dacă $f \mid \mathcal{C}_0^\infty(K,\Omega)$ este continuă, pentru fiecare compact $K \subseteq \Omega$. Ținînd seama de definiția topologiei pe $\mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$, continuitatea este echivalentă cu existența unui compact $K' \subseteq K$, $C \geqslant 0$ și $n \in \mathbf{N}$ astfel încît: $|f(\varphi)| \leqslant C p_{K',n}(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$, adică: $|f(\varphi)| \leqslant C \sup\limits_{\substack{x \in K' \\ |k| \leqslant n}} |D^k \varphi(x)|$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$. Această relație implică: $|f(\varphi)| \leqslant C \sup\limits_{\substack{x \in K' \\ |k| \leqslant n}} |D^k(\varphi)(x)| \leqslant C \sum\limits_{|k| \leqslant n} \sup\limits_{x \in K'} |D^k \varphi(x)|$. Reciproc, dacă are loc inegalitatea din enunț, [atunci:] $|f(\varphi)| \leqslant C \sum\limits_{|k| \leqslant n} \sup\limits_{x \in K'} |D^k \varphi(x)| \leqslant Cn\, p_{K,n}(\varphi)$.

b) Faptul că δ_x este liniară este evident. Fie $K \subseteq \Omega$ compact și $f \in \mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$. Deoarece: $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in K} |f(x)| = p_{K,0}(f)$, urmează că δ_x este o distribuție. c) Integrala are sens, căci notînd $K = \operatorname{supp} \varphi$, avem $|f\varphi| \leqslant |f| \sup\limits_{x \in K} |\varphi(x)|$. Apoi: $|T_f(\varphi)| \leqslant \sup\limits_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot \int_K |f(x)|\,dx = \int_K |f(x)|\,dx \cdot p_{K,0}(\varphi)$, ceea ce demonstrează continuitatea lui T_f. Pentru a doua afirmație, este suficient să arătăm că $\int_\Omega f\varphi\,dt = 0$, pentru fiecare $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, implică $f = 0$. Dar $f \mid_K \in L^1(K)$ pentru orice compact $K \subseteq \Omega$, deci $\varphi \to \int_K f\varphi\,dt$ este o funcțională liniară și continuă pe $L^\infty(K)$. Deoarece această funcțională se anulează pe $\mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$ care este dens în $L^\infty(K)$ (conform [10]), urmează $f|_K = 0$, deci $f = 0$. Dacă δ_0 ar fi de tip funcție, ar exista $f \in L_{loc}^1(\mathbf{R})$ astfel încît $\int_R \varphi(t) f(t)\,dt = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Notînd $\varphi_n(t) = \exp\left(-\frac{n^{-2}}{n^{-2} - t^2}\right)$ pentru $|t| \leqslant n^{-1}$ și $\varphi(t) = 0$ în rest, ajungem la contradicție, deoarece $\int_R \varphi_n(t) f(t)\,dt \to 0$. d) Dacă $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-\alpha, \alpha]$, avem: $vp\left(\frac{1}{t}\right)(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha \geqslant |t| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha \geqslant |t| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt +$ $+ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha \geqslant |t| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\,dt$, ceea ce arată că $vp\left(\frac{1}{t}\right)$ este bine definită. Liniaritatea este evidentă. Apoi: $\left|vp\left(\frac{1}{t}\right)(\varphi)\right| \leqslant 2\alpha \sup\limits_{|t| \leqslant \alpha} |\varphi'(t)| \leqslant$ $\leqslant 2\alpha\, p_{[-\alpha,\alpha],1}(\varphi)$, ceea ce arată că $vp\left(\frac{1}{t}\right)$ este o distribuție pe $\mathbf{R}$. e) Fie $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(K, \Omega)$ și $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. $\varphi\psi$ este, evident, în $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ și $\operatorname{supp}(\varphi\psi) \subseteq \operatorname{supp} \varphi$, adică $\varphi\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Apoi: $|(\psi f)(\varphi)| = |f(\varphi\psi)| \leqslant C \sum\limits_{|k| \leqslant n} \sup\limits_{x \in K} |D^k(\psi\varphi)(x)| \leqslant$

$\leqslant C(n+1)\max\{\sup_{x\in K}|\psi(x)|, \sup_{x\in K}|D^1\psi(x)|, \ldots, \sup_{x\in K}|D^n\psi(x)|\}\sum_{|k|\leqslant n}\sup_{x\in K}|D^k\varphi(x)|$

ceea ce dovedește că ψf este o distribuție (liniaritatea fiind evidentă).

11. a) f' este evident liniară. Dacă $\varphi\in\mathcal{D}_0^\infty(K,\ \Omega)$, atunci: $|f'(\varphi)| = |-f(\varphi')| \leqslant C\sum_{|k|\leqslant n}\sup_{x\in K}|D^k\varphi'| \leqslant C\sum_{|k|\leqslant n+1}\sup_{x\in K}|D^k\varphi|$, ceea ce arată continuitatea lui f'. b) Conform exercițiului 10, c), T_f este o distribuție, căci f este integrabilă pe orice compact. Avem: $(T_f)'(\varphi) = -f(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt = -[\varphi(\alpha) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$, unde s-a presupus $\operatorname{supp}\varphi\subseteq[-\alpha,\ \alpha]$. c) Pentru fiecare $\varphi\in\mathcal{D}_0^\infty(\Omega)$ avem: $(\psi f)'(\varphi) = -(\psi f)(\varphi') = -f(\psi\varphi')$, iar: $(\psi' f + \psi f')(\varphi) = (\psi' f)(\varphi) + (\psi f')(\varphi) = f(\psi'\varphi) + f'(\psi\varphi) = f(\psi'\varphi) - f(\psi'\varphi + \psi\varphi') = -f(\psi\varphi')$, adică relația din enunț.

12. Dacă $f = vp\left(\frac{1}{t}\right) + \alpha\delta_0$, pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}_0^\infty(\mathbf{R})$ avem: $(tf)(\varphi) = f(t\varphi) = vp\left(\frac{1}{t}\right)(t\varphi) + \alpha\delta_0(t\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|\geqslant\varepsilon}\frac{t\varphi(t)}{t}\,dt = \int_{\mathbf{R}}\varphi(t)\,dt = h(\varphi)$. Reciproc fie f o distribuție care satisface $tf = h$ și să notăm $f_0 = vp\left(\frac{1}{t}\right)$. Din cele de mai sus: $tf_0 = h$, deci $t(f_0 - f) = 0$. Rămîne de arătat că $tg = 0$ implică $g = \alpha\delta_0$. Prin ipoteză avem $\operatorname{tg}(\varphi) = g(t\varphi) = 0$, oricare ar fi $\varphi\in\mathcal{D}_0^\infty(\mathbf{R})$. Să notăm $\lambda = \varphi(0)$ și fie $\varphi_0\in\mathcal{D}_0^\infty(\mathbf{R})$, cu $\varphi_0(0) = 1$. Notînd $\psi(t) = \varphi(t) - \lambda\varphi_0(t)$, avem $\psi\in\mathcal{D}_0^\infty(\mathbf{R})$ și $\psi(0) = 0$. Dacă $\psi_1(t) = t^{-1}\psi(t)$ pentru $t\neq 0$ și $\psi_1(0) = \psi'(0)$, atunci ψ_1 are suport compact și se verifică fără dificultate că $\psi_1\in\mathcal{D}_0^\infty(\mathbf{R})$, iar $\psi(t) = t\,\psi_1(t)$. Avem $g(\varphi) = g(\lambda\varphi_0 + \psi) = \lambda g(\varphi_0) + g(t\psi_1) = \varphi(0)\,\alpha = \alpha\delta_0(\varphi)$, unde $\alpha = g(\varphi_0)$.

13. Conform exercițiului 10 a), pentru fiecare $\varphi\in\mathcal{D}_0^\infty((0,\ 1))$, avem: $|f(\varphi)| \leqslant C\sum_{|k|\leqslant n}\sup_{t\in[0,\ 1]}|D^k\varphi(t)|$. Conform teoremei creșterilor finite, $\sup_{t\in[0,\ 1]}|\psi(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,\ 1]}\left|\frac{d\psi}{dt}(t)\right|$, deci combinînd cu relația de mai sus: $|f(\varphi)| \leqslant C_1\sup_{t\in[0,\ 1]}\left|\frac{d^n\psi}{dt^n}(t)\right|$, pentru $\varphi\in\mathcal{D}_0^\infty((0,\ 1))$. Apoi: $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{d\psi}{dt}(t)\,dt$, de unde: $\sup_{t\in[0,\ 1]}|\psi(t)| \leqslant \int_{\mathbf{R}}\left|\frac{d\psi}{dt}(t\right|dt$. Combinînd aceste două relații, rezultă că, pentru orice $\varphi\in\mathcal{D}_0^\infty((0,\ 1))$, are loc inegalitatea $|f(\varphi)| \leqslant C_1\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{d^{n+1}\psi}{dt^{n+1}}(t)\right|dt = C_1\left\|\frac{d^{n+1}\psi}{dt^{n+1}}\right\|_1$. Rezultă că f este continuă în norma lui $L^1((0,\ 1))$. În virtutea teoremei lui Hahn-Banach, f se poate prelungi, cu păstrarea liniarității și a continuității, la $L^1((0,\ 1))$. Însă $[L^1((0,\ 1))]^* \simeq L^\infty((0,\ 1))$. Deci există $u\in L^\infty((0,\ 1))$ astfel încît $f(\varphi) = (-1)^n\int_{\mathbf{R}} u\,\frac{d^{n+1}\varphi}{dt^{n+1}}\,dt$. Sau, în termeni de distribuții: $f = \frac{d^n}{dt^n}T_u$.

14. a) Fie U o vecinătate oarecare a originii, $V \subseteq U$ o vecinătate închisă a originii, iar $W \subseteq V$ vecinătate convexă și echilibrată. $\overline{W}$ este încă vecinătate a originii, convexă și echilibrată, iar din $\overline{W} \subseteq V \subseteq U$ rezultă că există un sistem fundamental de vecinătăți ale originii care sînt tonouri. b) Dacă D este tonou, D este absorbantă, ceea ce arată că $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} nD$. nD fiind mulțimi închise, iar X de categoria a II-a, există n_0 astfel încît $\overset{\circ}{\overline{n_0 D}} \neq \emptyset$. Urmează $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$, deci există $x_0 \in \overset{\circ}{D}$. Fie V o vecinătate a originii astfel încît $x_0 + V \subseteq D$. D fiind echilibrată, avem $(-x_0) \in D$. D fiind convexă, avem: $1/2V \subseteq 1/2D + 1/2(-x_0) \subseteq D$, ceea ce arată că D este vecinătate a originii. c) Topologia lui X este întotdeauna mai puțin fină decît topologia dată de toate seminormele inferior semicontinue. Fie deci X tonelat, iar p o seminormă inferior semicontinuă pe X. $\{x \in X \mid p(x) \leqslant 1\}$ este o mulțime închisă, deci tonou, deci vecinătate a originii, ceea ce arată coincidența celor două topologii. Reciproc, să presupunem că topologia lui X coincide cu topologia dată de toate seminormele inferior semicontinue. Fie $D \subseteq X$ tonou. Notînd p funcționala Minkowski atașată lui D, să arătăm că p este inferior semicontinuă. Fie $\varepsilon > 0$ și $x_0 \in X$. Dacă $x \in x_0 + \varepsilon D$, avem $p(x) - p(x_0) \leqslant p(x - x_0) < \varepsilon$, ceea ce arată că p este inferior semicontinuă. d) Fie $D \subseteq X$ tonou. $D \cap X_i$ este mulțime închisă în X_i, deci tonou. Rezultă că $D \cap X_i$ este vecinătate a originii în X_i, adică D este vecinătate a originii în X.

15. a) Folosim exercițiul 3. Condiția (*iii*) este evident satisfăcută. Dacă V_1, V_2 sînt mulțimi convexe, echilibrate și care absorb orice mulțime mărginită, atunci $V_1 \cap V_2$ și $1/2\, V_1$ au aceleași proprietăți, de unde (*i*). Ținînd seama că $1/2V_1 + 1/2V_1 \subseteq V_1$, rezultă (*ii*). τ_B este mai fină ca τ, căci orice vecinătate a originii absoarbe orice mulțime mărginită. De aici urmează că orice mulțime τ_B — mărginită este τ — mărginită. Reciproc, fie o mulțime τ — mărginită; fiind absorbită prin definiție de orice τ_B — vecinătate a originii, este τ_B — mărginită. b) Fie $E \subseteq X$ o mulțime convexă, echilibrată și care absoarbe orice parte mărginită. Dacă p este funcționala Minkowski atașată lui E, este suficient să arătăm că p este continuă. Ținînd seama că X este metrizabil, să alegem ρ o metrică invariantă la translații (conform ex. III.23). Avem de arătat că, pentru fiecare șir $\{x_n\}$ din X cu $\rho(x_n, 0) \to 0$, avem $p(x_n) \to 0$. Putem alege un șir $\alpha_n \in \mathbf{R}$ astfel încît $\alpha_n \to +\infty$ și $\alpha_n \rho(x_n, 0) \to 0$. Avem $\rho(\alpha_n x_n, 0) \leqslant \alpha_n \rho(x_n, 0)$, deci $\alpha_n x_n \to 0$. Urmează că $\{\alpha_n x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ este o mulțime mărginită, deci absorbită de E. Există atunci $\mu \in \mathbf{R}$ astfel încît $p(\alpha_n x_n) \leqslant \mu$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Cum $\alpha_n \to +\infty$, urmează $p(x_n) \to 0$. c) Dacă $B \subseteq X_i$ este mărginită, atunci B este mărginită și în X. Fie V mulțime convexă, echilibrată și care absoarbe orice mulțime mărginită. Există $\lambda > 0$ astfel încît $B \subseteq \lambda V$. Rezultă $B \subseteq \lambda V \cap X_i = \lambda(V \cap X_i)$, deci $V \cap X_i$ absoarbe orice mulțime mărginită din X_i. Urmează că $V \cap X_i$ este vecinătate a originii în X_i, deci V este vecinătate a originii în X.

16. a) Dacă $f : X \to (X, \tau_B)$ este continuă, rezultă că $f : Y \to (X, \tau)$ este continuă. Invers, fie $f : Y \to (X, \tau)$ continuă, iar E o τ_B — vecinătate a originii. E este deci convexă, echilibrată și absoarbe orice parte mărginită. Urmează că $f^{-1}(E)$ are aceleași proprietăți în Y. Y fiind bornologic, $f^{-1}(E)$ este vecinătate a originii, ceea ce arată continuitatea aplicației $f : Y \to (X, \tau_B)$. b) $\alpha) \Rightarrow \beta)$ este evident; $\beta) \Rightarrow \gamma)$ rezultă din caracterizarea mulțimilor mărginite din exercițiul III.31. $\gamma) \Rightarrow \alpha)$. Fie f care satisface $\gamma)$ iar $U \subseteq Y$ o mulțime convexă, echilibrată și absorbantă. X fiind bornologic, este suficient să arătăm

că $f^{-1}(U)$ absoarbe orice parte mărginită din X. Fie $A \subseteq X$ mărginită, deci $f(A)$ este mărginită în Y. Există $\lambda > 0$ astfel încît $f(A) \subseteq \lambda U$, ceea ce arată că $A \subseteq \lambda f^{-1}(U)$. c) Fie $E \subseteq X$ o mulțime convexă, echilibrată, care absoarbe orice mulțime mărginită. Se verifică imediat (cu exercițiul 3) că $\{n^{-1}E\}_{n \in \mathbf{N}}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale originii într-o topologie local convexă τ_1. Fie $f : (X, \tau) \to (X, \tau_1)$ aplicația identică. Dacă $B \subseteq X$ este mărginită, există $\lambda > 0$ astfel încît $B \subseteq \lambda E$, ceea ce arată că $f(B) \subseteq \lambda n(n^{-1}E)$, adică $f(B)$ este mărginită în (X, τ_1). Conform ipotezei, f este continuă, deci τ este mai fină decît τ_1. În particular, E este vecinătate a originii în X.

17. Fie $f \in D$ și $|\lambda| \leqslant 1$. Avem $n|\lambda f(n^{-1})| \leqslant n|f(n^{-1})| \leqslant 1$, deci $\lambda f \in D$. Dacă $f, g \in D$ și $\lambda \in [0, 1]$ atunci $n|\lambda f(n^{-1}) + (1 - \lambda) g(n^{-1})| \leqslant \lambda n|f(n^{-1})| + (1 - \lambda) n|g(n^{-1})| < 1$, deci D este convexă. Fie $f \in X$ și $\varepsilon > 0$, astfel încît $f(t) = 0$, $\forall t \in [0, \varepsilon)$. Să notăm $\mu = \max\{n|f(n^{-1})| : \varepsilon \leqslant n^{-1}\}$. Dacă $\mu = 0$, evident $f \in D$. Dacă $\mu > 0$, atunci $\mu^{-1} f \in D$, ceea ce arată că D este absorbantă. În sfîrșit, fie $f \in \overline{D}$ și $\mu > 0$ încît $f(t) = 0$, $\forall t \in [0, \mu)$. Notăm $n_0 = \max\{n : n^{-1} \geqslant \mu\}$. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $g \in D$ astfel încît $|g(t) - f(t)| < \varepsilon n_0^{-1}$, $\forall t \in [0, 1]$. Pentru $n \leqslant n_0$ avem: $n|f(n^{-1})| \leqslant n|f(n^{-1}) - g(n^{-1})| + n|g(n^{-1})| \leqslant 1 + \varepsilon$. ε fiind oarecare, deducem $n|f(n^{-1})| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$ (dacă $n \geqslant n_0$, primul membru este nul). Urmează $f \in D$, deci D este tonou. Să arătăm că D nu este vecinătate a originii. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ putem alege n_0 încît $n_0^{-1} < \varepsilon$, iar f continuă pe $[0, 1]$, nulă pe $[0, (2n_0)^{-1}]$ și egală cu ε pe $[n_0^{-1}, 1]$. Evident, $f \in X$, $\|f\| = \varepsilon$, dar $f \notin D$, căci $n_0|f(n_0^{-1})| = n_0 \varepsilon > 1$. Deci D nu conține nici o sferă cu centrul în 0.

18. Fie A mărginită, U o vecinătate a originii iar $V \subseteq U$ o vecinătate convexă a originii. Există $\lambda > 0$ astfel încît $\mu A \subseteq V$, oricare ar fi $|\mu| \leqslant \lambda$. Din faptul că V este convexă urmează că $\mu \operatorname{co}(A) \subseteq V \subseteq U$, ceea ce arată $\operatorname{co}(A)$ este mărginită.

19. Fie A mărginită. $V_i = \{x \in X : p_i(x) < 1\}$ este vecinătate a originii, deci există $\lambda_i > 0$ astfel încît $\lambda_i A \subseteq V_i$; adică $p_i(\lambda_i x) < 1$, $\forall x \in A$. Urmează $p_i(x) < \lambda_i^{-1}$, $\forall x \in A$. Reciproc, să presupunem condiția din enunț îndeplinită și fie $V = \{x \in X : p_{i_k}(x) < \varepsilon, k = \overline{1, n}\}$ o vecinătate a originii. Notînd $\lambda = 1/2\, \varepsilon \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}\}$ avem $A \subseteq \lambda V$.

20. Fie $M \subseteq X$ o varietate liniară închisă și $x \notin M$. Există deci o vecinătate convexă V a originii, încît $x + V \subseteq \mathbf{C}M$, adică $(x + V) \cap M = \emptyset$. Conform exercițiului III.44, există un hiperplan închis $H = \{z : f(z) = \alpha\}$, încît $M \subseteq H$ și $H \cap (x + V) = \emptyset$. În particular, $x \notin H$, deci $x \notin \cap H$, intersecția fiind luată după toate hiperplanele închise care conțin M. Rezultă $\cap H \subseteq M$. Incluziunea inversă este evidentă.

21. a) Fie $x, y \in X_B$, $\lambda \in \Gamma$ și n_1, n_2 astfel încît $x \in n_1 B$, $y \in n_2 B$. B fiind convexă, urmează $x + y \in n_1 B + n_2 B = (n_1 + n_2) B \subseteq X_B$. Există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $m \leqslant |\lambda| < m + 1$. Din faptul că B este echilibrată urmează $\lambda x = (m + 1)[\lambda(m + 1)^{-1}] x \in (m + 1) n_1 B \subseteq X_B$, ceea ce arată că X_B este subspațiu liniar. Fie $x \in X_B$ încît $p_B(x) = 0$. Există deci n_0 încît $n_0^{-1} x \in B$ și $\lambda_n \to 0$ astfel încît $x \in \lambda_n B$. Urmează $\lambda_n^{-1} x \in B$. Presupunînd $x \neq 0$, fie V o vecinătate a originii, echilibrată, astfel încît $x \notin V$. Fie apoi $\lambda > 0$ încît $B \subseteq \lambda V$. Există n încît $\lambda_n < \lambda^{-1}$, ceea ce implică $\lambda_n^{-1} x \in \lambda V$. Din faptul că V este echilibrată urmează $x \in V$, contradicție. Deci $x = 0$ și p_B este o normă pe X_B. b) Pentru fiecare $x \in X$, mulțimea $\{\lambda x : |\lambda| \leqslant 1\}$ este convexă, echilibrată, mărginită, închisă și conține pe x, de unde $X = \cup X_B$. Dacă C este o parte convexă, echilibrată, mărginită și închisă iar $B \subseteq C$, atunci $p_B \leqslant p_C$, ceea ce demonstrează continuitatea incluziunii canonice. În sfîrșit, $\operatorname{co}(\varepsilon(B \cup C))$

conține $B \cup C$, este convexă, echilibrată, mărginită și închisă, ceea ce dovedește că familia $\{X_B\}$ este filtrantă crescător. Fie A convexă, echilibrată și care absoarbe orice mulțime mărginită. Oricare ar fi B convexă, echilibrată, absorbantă și închisă, există $\lambda > 0$ încît $B \subseteq \lambda A$, adică $\lambda^{-1}B \subseteq A$. Însă $\lambda^{-1}B$ este vecinătate a originii în X_B, ceea ce arată că $A \cap X_B$ este, de asemenea, vecinătate a originii în X_B. Conform definiției, A este vecinătate a originii în topologia limită inductivă. Reciproc, fie A o vecinătate convexă și echilibrată a originii în topologia limită inductivă, iar $B_1 \subseteq X$ o mulțime mărginită oarecare. Notînd $B = \text{co}(\varepsilon(B_1))$, avem $B_1 \subseteq B$ iar B este convexă, închisă, echilibrată și mărginită. Prin ipoteză, $B \cap A$ este vecinătate a originii în X_B, deci există $\lambda > 0$ încît $\lambda B \subseteq A \cap B$. Urmează $\lambda B \subseteq A$ sau $B_1 \subseteq \lambda^{-1}A$, adică A absoarbe orice mulțime mărginită. Urmează că A este τ_B — vecinătate a originii.

22. Fie ρ o metrică compatibilă cu topologia, V o vecinătate a originii și $\lambda > 0$ încît $S(\lambda) = \{x \in X \mid \rho(x, 0) < \lambda\} \subseteq V$. B_n fiind mărginită, există $\mu_n > 0$ astfel încît $B_n \subseteq \mu_n S(1)$. Notînd $\alpha_n = \mu_n^{-1}$, avem $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n B_n \subseteq S(1) = \lambda^{-1} S(\lambda) =$

$= \lambda^{-1}V$, ceea ce arată că $\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n B_n$ este mărginită.

23. Să presupunem K_1 mulțime compactă. Deoarece $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, iar K_2 este închisă, pentru fiecare $x \in K_1$ există V_x vecinătate a originii astfel încît: $(x + V_x) \cap K_2 = \emptyset$, Fie $V'_x \subseteq V_x$ o vecinătate deschisă convexă și echilibrată a originii, încît $V'_x + V'_x \subseteq V_x$. Din $K_1 \subseteq \bigcup_{x \in K_1} (x + V'_x)$ rezultă că există

$x_1, \ldots, x_n$ astfel încît $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V'_{x_i})$. Fie $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{xi}$. Atunci $(K_1 +$

$+ V) \cap K_2 = \emptyset$. Dar $K_1 + V$ este convexă, deschisă și nevidă deci, conform exercițiului III.45, există un hiperplan închis $H = \{z \mid f(z) = \alpha\}$, care separă $K_1 + V$ de K_2. Putem presupune deci că $f(z) \leqslant \alpha$ pentru orice $z \in K_1 + V$ și $f(z) \geqslant \alpha$ pentru orice $z \in K_2$. Să arătăm că există $x_0 \in V$ astfel încît $f(x_0) > 0$. Dacă nu, ar urma $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in V$. Deoarece V este echilibrată, avem $f(x) = 0$, $\forall x \in V$. Fie $x \in X$ oarecare. Există $\lambda > 0$ astfel încît $\lambda x \in V$, deci $f(x) = 0$, $\forall x \in X$, contradicție, căci f nu este identic nulă. Deci, pentru fiecare $z \in K_1$, avem $f(z) \leqslant \alpha - f(x_0)$. Hiperplanul $H_1 =$ $= \{z \mid f(z) = \alpha - 1/2\, f(x_0)\}$ separă tare K_1 de K_2.

24. Fie A convexă, închisă și nevidă, iar $x \notin A$. Mulțimea $\{x\}$ este compactă și convexă deci, conform exercițiului 23, există un hiperplan închis $H =$ $= \{z \mid f(z) = \alpha\}$ care separă tare $\{x\}$ de A. Putem presupune că $f(z) \leqslant \alpha$, $\forall z \in A$ iar $f(x) > \alpha$. Urmează că $A \subseteq \{z \mid f(z) \leqslant \alpha\}$ iar $x \notin \{z \mid f(z) \leqslant \alpha\}$ adică A este o intersecție de hiperplane.

25. Să alegem $y \in B$ și să notăm $K = A - B + y$. A și B fiind disjuncte, $y \notin K$. K este convexă. Făcînd eventual o translație, putem presupune $0 \in A$, deci că A este absorbantă. Urmează imediat că și K este absorbantă. Fie p_K funcționala convexă atașată lui K, iar $f \in X^a$ o funcțională liniară, astfel încît $f(y) = p_K(y)$ și $f(x) \leqslant p_K(x)$, $\forall x \in X$. Din $y \notin K$ urmează $f(y) =$ $= p_K(y) \geqslant 1$. Oricare ar fi $x \in K$, avem $f(x) \leqslant p_K(x) \leqslant 1$. Dacă $a \in A$ și $b \in B$, vom avea deci $f(a - b) = f(a - b + y) - f(y) \leqslant 0$. Notînd $\alpha =$ $= \sup_{a \in A} f(a)$, avem deci $f(b) \geqslant \alpha$, $\forall b \in B$, ceea ce arată că hiperplanul

$H = \{x \mid f(x) = \alpha\}$ separă A de B. Se observă imediat că, dacă A este convexă și absorbantă, atunci este vecinătate a originii în topologia τ_s (conform exercițiului 4), deci are interior nevid în această topologie. Cu această observație, exercițiul III.45 devine echivalent cu cel de mai sus.

26. Pe orice spațiu local convex $\neq \{0\}$ există funcționale liniare continue, neidentic nule, pe baza teoremei lui Hahn-Banach, deci topologia considerată nu poate fi local convexă.

27. Vom arăta, că, pentru orice $S \in \sigma$ și V convexă, $M(S, V)$ este convexă. Utilizînd exercițiul III.36, va rezulta că X este s.l.c. în σ-topologie. Dacă $f, g \in M(S, V)$ iar $\lambda \in [0, 1]$ avem $f(s), g(s) \in V$, $\forall s \in S$, deci $\lambda f(s) + (1 - \lambda)g(s) \in V$. Rezultă că $(\lambda(f + (1 - \lambda)g)(S) \subseteq V$, adică $\lambda f + (1 - \lambda)g \in M(S, V)$. Fie $V = V(0; i_1, ..., i_n, \varepsilon) = \{x \mid p_{i_k}(x) < \varepsilon, k = \overline{1, n}\}$. Avem: $\overline{V} = \{x \mid p_{i_k}(x) \leqslant \varepsilon, k = \overline{1, n}\}$, deci $f \in M(S, \overline{V})$ dacă și numai dacă $p_{i_k}(f(s)) \leqslant \varepsilon$, $\forall s \in S$, $k = \overline{1, n}$; sau, ceea ce este echivalent: $p_S, i_k(f) = \sup_{s \in S} p_{i_k}(f(s)) \leqslant \varepsilon$, $k = \overline{1, n}$, adică $M(S, \overline{V}) = \overline{V}(0; S, i_1, ..., S, i_n; \varepsilon)$. Aceste mulțimi formează un sistem fundamental de vecinătăți, deci a doua afirmație este demonstrată.

28. a) $\{x\}$ este extremală dacă și numai dacă din $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, cu $y, z \in K$ și $\lambda \in (0, 1)$ urmează $y = z = x$. Atunci x se numește punct extremal. b) Fie ε mulțimea părților extremale, nevide și închise din K. Avem $K \in \varepsilon$, deci $\varepsilon \neq \emptyset$. Să arătăm că ε este inductiv ordonată. Fie $\{K_i\} \subseteq \varepsilon$ un lanț (descrescător). K_i fiind închise în compactul K, $K_0 = \cap K_i$ este un compact nevid. Fie $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in K_0$ cu $x, y \in K$ și $\lambda \in (0, 1)$. Urmează $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K_i$ și, din extremalitate, $x, y \in K_i$. Deducem $x, y \in K_0$, adică $K_0 \in \varepsilon$. Conform lemei lui Zorn, ε are elemente minimale. Fie K' un element minimal în ε. K' este nevid prin definiție. Dacă ar conține mai mult decît un punct, ar exista o funcțională liniară continuă pe X, care să nu fie constantă pe K' (conform teoremei lui Hahn-Banach). Fie $f(K') = [\alpha, \beta]$ cu $\alpha < \beta$. ($f(K')$ este compact convex și nu este redus la un punct.) Notăm $H = \{x \mid f(x) = \alpha\}$, deci $K_1 = K' \cap H$ este compact nevid în K. Dar K_1 este minimal: dacă $\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in K_1$ atunci $x, y \in K'$ iar $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \alpha$. Dar $f(x) \geqslant \alpha$, $f(y) \geqslant \alpha$, deci $\alpha = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \alpha$, ceea ce implică $f(x) = f(y) = \alpha$, adică $x, y \in K_1$, deci contradicție cu $K' \neq K_1$. c) Să notăm A înfășurătoarea convexă și închisă a mulțimii punctelor extremale din K și să presupunem $A \neq K$. Există atunci $x_0 \in K$, $x_0 \notin A$. Conform exercițiului III.45, există o funcțională liniară continuă f pe X, încît $f(x_0) < \alpha$ și $f(y) \geqslant \alpha$, oricare ar fi $y \in A$. Fie $H = \{x \mid f(x) = f(x_0)\}$, deci $H \cap K$ este compact nevid în K. Cu un raționament analog celui de la pct. b), rezultă că există cel puțin un punct extremal în $H \cap K$. Dar $A \cap H = \emptyset$, contradicție.

29. Fie $x \in \overline{\text{co}}(K)$. Conform exercițiului III.14, avem $K = \cap (V + K)$, unde V parcurge mulțimea vecinătăților originii care sînt convexe și echilibrate. Vom arăta că $x \in V + K$, pentru orice vecinătate V convexă și echilibrată a originii. Să alegem $s_1, ..., s_n \in K$ astfel încît $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (s_i + V)$ și fie $A_i = \overline{\text{co}}(K \cap (s_i + V))$. Avem $A_i \subseteq \overline{\text{co}}(K)$, deci A_i este compact. Notînd $T = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, avem: $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \overline{\text{co}}(T)$. Dar $\text{co}(T)$ este închis, conform

exercițiului III.15, deci $\overline{co}(T) = co(T)$, adică $x \in \overline{co}(T)$. Fie acum $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ (conform ex. III.1). x fiind extremal, în mod necesar $x = x_i \in A_i$. Însă $A_i \subseteq s_i + V$, deci $x \in s_i + V \subseteq S + V$.

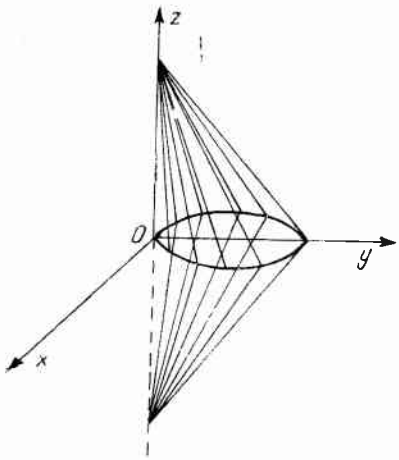

Fig. 7.

30. Fie $K \subseteq \mathbf{R}^3$ mulțimea obținută prin reuniunea conurilor de bază cercul $(x-1)^2 + y^2 = 1, z = 0$ și de vîrfuri, respectiv: $(0, 0, 1)$ și $(0, 0, -1)$. K este evident compactă și convexă, iar mulțimea punctelor sale extremale este: $\{(0, 0, 1)\} \cup \{(0, 0, -1)\} \cup \{(x, y, 0) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ deci nu este închisă (conform figurii 7).

31. Demonstrația de mai jos aparține lui B. Price [19, pg. 62]. Fie $K \subseteq \mathbf{R}^2$ compact convex, x_n un șir de puncte extremale ale lui K, iar $x_n \to x$. Deoarece $x_n \in \partial K$, deducem $x \in \partial K$. Fie d dreapta suport a lui K, prin x. Dacă $\{x\} = d \cap K$ atunci x este extremal. Dacă nu, deci dacă am presupune teorema falsă, rămîne posibilitatea ca x să fie punct interior al unui segment de pe d, conținut în K. Însă atunci x n-ar mai putea fi limita unui șir de puncte extremale.

32. a) Mulțimea considerată este $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$. Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$ și $\lambda \in [0, 1]$. Avem: $[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]^2 + [\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2]^2 = \lambda^2(x_1^2 + y_1^2) + 2\lambda(1-\lambda)[x_1x_2 + y_1y_2] + (1-\lambda)^2(x_2^2 + y_2^2) \leqslant \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) \cdot (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) + (1-\lambda)^2 \leqslant \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 = 1$, ceea ce arată că $\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in K$, deci K este convexă. Fie $(x, y) \in K$ și $|\lambda| \leqslant 1$. Avem $(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 \leqslant \lambda^2 r^2 \leqslant r^2$, deci $\lambda(x, y) \in K$ și K este echilibrată. În sfîrșit, fie $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Dacă $x = y = 0$, avem, evident, $(x, y) \in K$. Dacă nu, fie $\lambda = r(x^2+y^2)^{-1/2}$. Atunci $\lambda(x, y) \in K$. După definiție, $p_K(x, y) = \inf\{\lambda > 0 \mid (x, y) \in \lambda K\} = \inf\{\lambda > 0 \mid x^2 + y^2 \leqslant \lambda^2 r^2\} = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda^2 \geqslant r^{-2}(x^2 + y^2)\} = r^{-1}(x^2 + y^2)^{1/2}$. b) Mulțimea considerată este $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1\}$. Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ din K și $\lambda \in [0, 1]$. Avem $\max\{|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2|, |\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2|\} \leqslant \lambda \max\{|x_1|, |y_1|\} + (1-\lambda)\max\{|x_2|, |y_2|\} \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1$, deci K este convexă. Dacă $(x, y) \in K$ și $|\lambda| \leqslant 1$, atunci $\max\{|\lambda x|, |\lambda y|\} = |\lambda| \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1$. deci K este echilibrată. Deoarece K conține cercul de centru $(0, 0)$ și rază 1, K este absorbantă, avînd în vedere a). În sfîrșit, $p_K(x, y) = \inf\{\lambda \mid (x, y) \in \lambda K\} = \inf\{\lambda \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant \lambda\} = \max\{|x|, |y|\}$. c) Mulțimea considerată este $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$. Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ din K și $\lambda \in [0, 1]$. Avem: $|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| + |\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2| \leqslant \lambda(|x_1| + |y_1|) + (1-\lambda)(|x_2| + |y_2| \leqslant 1$, deci K este convexă. Dacă $(x, y) \in K$ și $|\lambda| \leqslant 1$, atunci $|\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) \leqslant 1$, deci K este echilibrată. Deoarece K conține cercul de centru $(0, 0)$ și rază $\sqrt{2}/2$, K este absorbantă, conform pct. a). În sfîrșit: $p_K(x, y) = \inf\{\lambda \mid (x, y) \in \lambda K\} = \inf\{\lambda \mid |x| + |y| \leqslant \lambda\} = |x| + |y|$ (conform figurii 8 a, b, c).

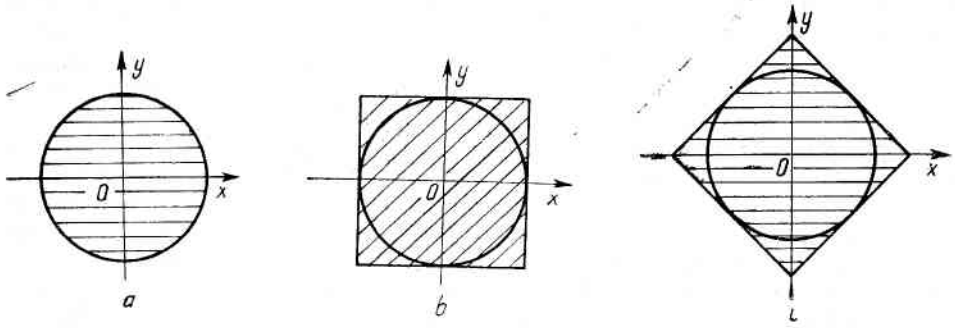

Fig. 8.

33. a) $(i) \Rightarrow (ii)$ este evident. $(ii) \Rightarrow (iii)$ este chiar definiția continuității în origine. $(iii) \Rightarrow (iv)$. Familia $\mathcal{P}$ fiind dirijată, există $p \in \mathcal{P}$ și $\delta > 0$, încît $\{x \mid p(x) < \delta\} \subseteq \{x \mid q(x) < 1\}$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pentru fiecare $x \in X$ avem: $p\left(\frac{\delta}{\varepsilon + p(x)}\, x\right) = \frac{\delta}{\varepsilon + p(x)}\, p(x) < \delta$ deci, conform celor de mai sus, $q\left(\frac{\delta}{\varepsilon + p(x)}\, x\right) < 1$, adică $q(x) < \delta^{-1}\, p(x) + \varepsilon\delta^{-1}$. Deoarece ε a fost arbitrar, deducem $q(x) < \delta^{-1}\, p(x)$. $(iv) \Rightarrow (i)$. Fie $x_0 \in X$ și $\varepsilon > 0$. Deoarece avem prin ipoteză $q(x - x_0) \leqslant Cp(x - x_0)$, notînd $\delta = \varepsilon/C$ și $V = \{x \mid p(x - x_0) < \delta\}$, V rezultă vecinătate pentru x_0 și, pentru orice $x \in V$ avem $|\, q(x) - q(x_0)\,| < \varepsilon$, ceea ce dovedește continuitatea lui q în x_0. b) Este evident verificată condiția (iv) de la pct. a). c) q fiind continuă, din (iii) de la pct. a) deducem că fiecare mulțime $\{x \mid q(x) < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ este o vecinătate a originii în topologia indusă de $\mathcal{P}$, ceea ce dovedește afirmația.

34. a) Dacă p_1, p_2 sînt seminorme continue, atunci $p(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}$ este tot o seminormă continuă. b) Dacă A este o vecinătate convexă și echilibrată a originii, avem $A \subseteq \{x \mid p_A(x) \leqslant 1\} \subseteq \{x \mid p_A(x) < 2\}$, ceea ce arată că p_A este continuă conform ex. 33 a). Deci topologia indusă de $\mathcal{P}$ este mai fină ca topologia lui X. Însă, tot după exercițiul 33, pentru fiecare $p \in \mathcal{P}$, $\{x \mid p(x) < 1\}$ este vecinătate a originii, ceea ce arată că $\mathcal{P}$ definește exact topologia lui X. c) Fie Q o familie de seminorme care induce topologia lui X și $q \in Q$. Rezultă că $\{x \mid q(x) < 1\}$ este vecinătate a originii. Conform exercițiului 33, q este continuă, adică $q \in \mathcal{P}$. d) Se știe că T este continuu dacă și numai dacă, pentru fiecare $q \in Q$, există $p \in \mathcal{P}$ și $C > 0$ astfel încît $p(Tx) \leqslant Cq(x)$, $\forall\, x \in X$. Însă $p_1(x) = C^{-1}\, p(x)$ este tot o seminormă continuă pe X, deci $p_1 \in \mathcal{P}$ și $p_1(Tx) \leqslant q(x)$.

35. a) Avem: $p_1(\lambda f) = \sup\limits_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |\, \lambda f(x)\,| = |\, \lambda\,|\, p_1(f)$; $p_2(\lambda f) = \sup\limits_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |\, \lambda f(x)\,| =$

$= |\, \lambda\,|\, p_2(f)$; $p_1(f + g) = \sup\limits_{w \in [0, \frac{1}{2}]} |\, f(x) + g(x)\,| \leqslant \sup\limits_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |\, f(x)\,| + \sup\limits_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |\, g(x)\,| =$

$= p_1(f) + p_1(g)$; $p_2(f + g) = \sup\limits_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |\, f(x) + g(x)\,| \leqslant \sup\limits_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |\, f(x)\,| + \sup\limits_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |\, g(x)\,| =$

$= p_2(f) + p_2(g)$. Considerînd funcțiile: $f_1(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1/2]$ și $f_1(x) = x - 1/2$ pentru $x \in (1/2, 1]$; respectiv: $f_2(x) = 1/2 - x$ dacă $x \in [0, 1/2]$ și $f_2(x) = 0$ pentru $x \in (1/2, 1]$, avem $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([0, 1])$, $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ dar $p_1(f_1) = 0$

și $p_2(f_2) = 0$. b) Fie $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, $f \neq 0$. Fie $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $f(t_0) \neq 0$. Dacă $t_0 \in [0, 1/2]$ atunci $p_1(f) \neq 0$. Dacă $t_0 \in (1/2, 1]$ atunci $p_2(f) \neq 0$. Dacă $\{p_1, p_2\}$ ar fi dirijată, ar trebui să avem: fie $p_1 \leqslant p_2$, fie $p_2 \leqslant p_1$. Însă, considerînd $f_1(x) = x$, avem $p_1(f_1) = 1/2 < 1 = p_2(f_1)$; în timp ce, pentru $f_2(x) = 1 - x$, avem: $p_1(f_2) = 1 > 1/2 = p_2(f_2)$. c) Deoarece $p_i(f) \leqslant \|f\|$, $(i = 1, 2)$, $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$ rezultă că topologia dată de $\{p_1, p_2\}$ este mai fină ca topologia uzuală. Pe de altă parte, pentru orice $\varepsilon > 0$, avem: $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid p_1(f) < \varepsilon, p_2(f) < \varepsilon\} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \|f\| < \varepsilon\}$, ceea ce arată coincidența celor două topologii. d) Putem alege $p_3(f) = \max\{p_1(f), p_2(f)\} = \|f\|$ și condițiile impuse sînt îndeplinite. Fie acum p_3 o seminormă pe $\mathcal{C}([0, 1])$ astfel încît $\{p_1, p_2, p_3\}$ să fie dirijată și să inducă aceeași topologie ca și $\{p_1, p_2\}$. Trebuie deci, pe de o parte, ca $p_3(f) \geqslant \max\{p_1(f), p_2(f)\} = \|f\|$; pe de altă parte, trebuie să existe $\delta > 0$, atfel încît: $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid p_1(f) < \delta, p_2(f) < \delta\} \subseteq \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid p_3(f) < 1\}$, ceea ce implică $p_3(f) < \delta^{-1} \|f\|$ demonstrînd astfel ultimele afirmații.

36. Necesitatea condiției este evidentă. Reciproc, să presupunem că $f(S) \subseteq f(A)$, $\forall f \in X'$ și fie $x \in S$. Dacă, prin absurd, $x \notin A$, atunci, aplicînd exercițiul 23, există $f \in X'$ și $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) < \alpha$ și $f(a) > \alpha$, $\forall a \in A$, în contradicție cu $f(x) \in f(A)$.

37. Fie $\mathcal{P}$ o familie dirijată de seminorme, care definește topologia lui X. f fiind continuă, există $p \in \mathcal{P}$ și $C > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant Cp(x)$, $\forall x \in X_0$. Deoarece $p_1(x) = Cp(x)$ este încă o seminormă pe X, teorema lui Hahn-Banach arată că există o funcțională liniară $F : X \to \Gamma$ astfel încît $F|_{X_0} = f$ și $F(x) \leqslant p_1(x) = Cp(x)$. Ultima inegalitate asigură continuitatea lui F. Alegînd $X = L^p([0, 1])$ cu $p \in (0, 1)$, $\varphi \in L^p([0, 1])$, $\varphi \neq 0$ și $X_0 = \mathbf{R}\varphi$, aplicația $f : X_0 \to \mathbf{R}$, definită prin $f(\lambda\varphi) = \lambda$, este evident liniară și continuă. Dar f nu se poate prelungi la o aplicație liniară și continuă pe întreg X, datorită exercițiului III.47.

38. Fie X spațiu local convex, de dimensiune algebric infinită. Există funcționale liniare discontinue pe X (aplicînd construcția din exercițiul I.1). Fie $f : X \to \mathbf{R}$ o asemenea funcțională. Mulțimile $\{x \mid f(x) \leqslant 0\}$ și $\{x \mid f(x) > 0\}$ sînt convexe și disjuncte. Dacă H ar fi un hiperplan închis care le separă, ar urma $H \subseteq \{x \mid f(x) = 0\} = H_1$. Însă H_1 este hiperplan dens, de unde $H = H_1 = X$, contradicție.

39. a) Avînd în vedere exercițiul III.43, p_A este bine definită. Dacă $f \in X'$ și $f \neq 0$, există $x \in X$ încît $f(x) \neq 0$. Deoarece $\{x\}$ este o mulțime mărginită, avem $p_{\{x\}}(f) \neq 0$, ceea ce arată că familia considerată este suficientă. Conform exercițiului III.31, dacă A, B sînt mărginite, atunci $A \cup B$ este mărginită. Avem $p_{A \cup B}(f) \geqslant p_A(f)$ și $p_{A \cup B}(f) \geqslant p_B(f)$, $\forall f \in X'$, ceea ce arată că familia considerată este dirijată. b) Avem: $\tilde{x}(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda\tilde{x}(f) + \mu\tilde{x}(g)$, ceea ce arată liniaritatea. Apoi: $|\tilde{x}(f)| = |f(x)| = p_{\{x\}}(f)$ demonstrează continuitatea. c) Este suficient să aplicăm exercițiul 27 pentru $X = \Gamma$ și familia de seminorme formată dintr-o singură seminormă $p(x) = |x|$.

40. Fie W o vecinătate a originii, iar V o vecinătate convexă a originii, astfel încît $V + V \subseteq W$. Fie $a_1, \ldots, a_n \in A$ astfel încît $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + V)$. Notînd $B = \operatorname{co}\{a_1, \ldots, a_n\}$, avem $B \subseteq \operatorname{co}(A) \subseteq B + V$. Deoarece B este mulțime mărginită într-un spațiu finit dimensional, B este total mărginită. Exista

deci $b_1, ..., b_m \in B \subseteq \text{co}(A)$, astfel încît $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (b_j + V)$, de unde: $A = \bigcup_{j=1}^{m} (b_j + W)$.

41. a) Dacă $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, evident $\varphi_a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, deci T_a este bine definit. Liniaritatea lui T_a este evidentă. Apoi, dacă $\text{supp}\ \varphi \subseteq K$, atunci $\text{supp}\ \varphi_a \subseteq K + a$, deci faptul că T_a este distribuție rezultă din: $|T_a\varphi| = |T\varphi_a| \leqslant C \sum_{|k| \leqslant n} \sup_{t \in K} |D^k \varphi_a(t)| = C \sum_{|k| \leqslant n} \sup_{t \in K+a} |D^k \varphi(t)|$. b) Deoarece $\lim_{h \to 0} h^{-1}(\varphi(t-h) - \varphi(t)) = -\varphi'(t)$ în $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, avem: $\lim_{h \to 0} h^{-1}(T_h - T)(\varphi) = \lim_{h \to 0} h^{-1}(T_h\varphi - T\varphi) = \lim_{h \to 0} T(h^{-1}(\varphi_h - \varphi)) = T(\lim_{h \to 0} h^{-1}(\varphi_h - \varphi)) = T(-\varphi') = T'\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$.

42. a) Deoarece $p_n(f+g) = \sup_{t \in [-n, n]} |(f+g)(t)| \leqslant \sup_{t \in [-n, n]} |f(t)| + \sup_{t \in [-n, n]} |g(t)| = p_n(f) + p_n(g)$; $p_n(\lambda f) = \sup_{t \in [-n, n]} |\lambda f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-n, n]} |f(t)| = |\lambda|\, p_n(f)$, rezultă că fiecare p_n este o seminormă. Din $[-n, n] \subseteq [-(n+1), n+1]$ deducem: $p_n(f) = \sup_{t \in [-n, n]} |f(t)| \leqslant \sup_{t \in [-(n+1), n+1]} |f(t)| = p_{n+1}(f)$, deci familia considerată este crescătoare. Dacă $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ și $f \neq 0$, există $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(t_0) \neq 0$. Există n_0 astfel încît $t_0 \in [-n_0, n_0]$, și deci $p_{n_0}(f) \neq 0$. Deci familia considerată este suficientă. În aceste condiții, topologia indusă este metrizabilă. b) $f_k \to f$ dacă și numai dacă $p_n(f_k - f) \to 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Fie $K \subseteq \mathbf{R}$ compact. Există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $K \subseteq [-n, n]$ deci $\sup_{t \in K} |(f_k - f)(t)| \to 0$, adică $f_k \to f$, uniform pe K. Reciproc, dacă $f_k \to f$ uniform pe fiecare compact din $\mathbf{R}$, deducem, în particular, că $f_k \to f$ uniform pe fiecare $[-n, n]$, ceea ce arată că $p_n(f_k - f) \to 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

43. Dacă f este continuă pe $\mathbf{R}$, atunci și $t \to f(t+a)$ este tot continuă pe $\mathbf{R}$. Deci T_a este bine definit. Din $T_a(\lambda f + \mu g)(t) = (\lambda f + \mu g)(t+a) = \lambda f(t+a) + \mu g(t+a) = \lambda(T_a f)(t) + \mu(T_a g)(t)$ rezultă că T_a este liniar. În sfîrșit, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ există $n' \in \mathbf{N}$ astfel încît $[-n+a, n+a] \subseteq [-n', n']$ deci: $p_n(T_a f) = \sup_{t \in [-n, n]} |(T_a f)(t)| = \sup_{t \in [-n, n]} |f(t+a)| = \sup_{s \in [-n+a, n+a]} |f(s)| \leqslant \sup_{s \in [-n', n']} |f(s)| = p_{n'}(f)$, ceea ce demonstrează continuitatea lui T_a.

V. SPAȚII NORMATE

1. Mulțimile $S(0, 1)$, $S_1(0, 1)$ și $S_2(0, 1)$ sînt reprezentate grafic în figura 9 a), b), c). Se observă imediat că raza cercului înscris în pătratul din figura 9 b) este $\sqrt{2}/2$, iar raza cercului circumscris este 1 deci: $\sqrt{2}/2 \leqslant \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \leqslant 1$, de unde $a = \sqrt{2}/2$ și $b = 1$. Apoi, raza cercului înscris în pătratul din figura 9 c) este 1, iar raza cercului circumscris este $\sqrt{2}$, deci $1 \leqslant \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \leqslant \sqrt{2}$, adică $c = 1$, $d = \sqrt{2}$.

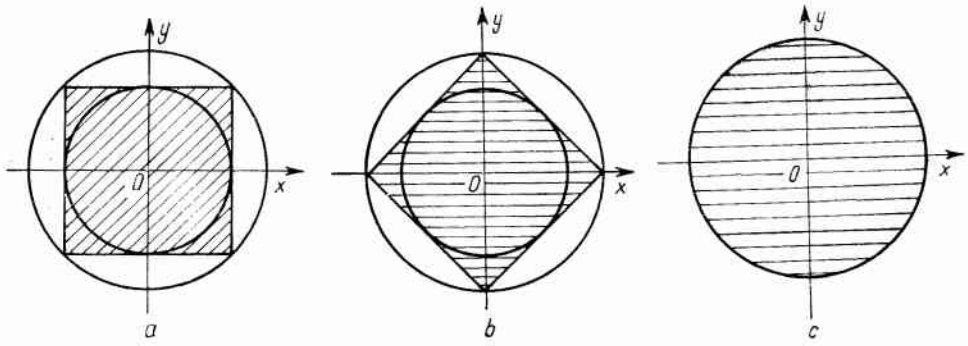

Fig. 9

2. a) Evident, $\|f\|' \geqslant 0$ și $\|0\|' = 0$. Fie $f \in \mathscr{C}^1([0, 1])$ încît $\|f\|' = 0$. Urmează $f(0) = 0$ și $f'(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Conform teoremei creșterilor finite, pentru fiecare $t \in [0, 1]$ există $\theta \in (0, 1)$ astfel încît $|f(t)| = |f(t) - f(0)| = |tf'(\theta)| = 0$, deci $f = 0$. Apoi: $\|\lambda f\|' = |\lambda f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda| \, \|f\|'$; $\|f + g\|' = |(f+g)(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |(f+g)'(t)| \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \sup_{t \in [0,1]} (|f'(t)| + |g'(t)|) \leqslant \|f\|' + \|g\|'$. b). Dacă $f \in \mathscr{C}^1([0, 1])$ atunci: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|$; $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \leqslant |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - f(0)| = |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |tf'(\theta t)| \leqslant |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| = \|f\|'$. Dacă $f_n \to f$ în norma $\|\cdot\|$, rezultă $\|f_n - f\| \to 0$, deci cu atît mai mult $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Dacă $f_n \to f$ în norma $\|\cdot\|'$, avem $\|f_n - f\|' \to 0$, ceea ce implică $\|f_n - f\| \to 0$. c) Avem: $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n \, dt = (n+1)^{-1}$ și $\|f_n\| = \sup_{t \in [0,1]} t^n = 1$, ceea ce arată că $f_n \to 0$ în norma $\|\cdot\|_1$. Dacă $f_n \to f$ în norma $\|\cdot\|$, conform b), ar urma $f_n \to f$ în norma $\|\cdot\|_1$, adică $f = 0$. Dar $\|f_n\| = 1$ arată că așa ceva este imposibil, deci $\{f_n\}$ nu converge în norma $\|\cdot\|$, deci cu atît mai mult nu are limită în norma $\|\cdot\|'$. Apoi: $\|g_n\| = \sup_{t \in [0,1]} |n^{-1} \sin nt| \leqslant n^{-1}$, iar $\|g_n\|' = |n^{-1} \sin 0| + \sup_{t \in [0,1]} |\cos nt| = 1$. Ca mai sus, rezultă că $g_n \to 0$ în normele $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|$, dar $\{g_n\}$ nu are limită în norma $\|\cdot\|'$. Cu acestea, rezultă că cele trei norme sînt comparabile: $\|f\|_1 \leqslant \|f\| \leqslant \|f\|'$, $\forall f \in \mathscr{C}^1([0, 1])$, dar nu sînt echivalente.

3. a) $f \in \alpha(A)$ este echivalent cu $f(x) = 0$, $\forall x \in A$. Dacă $f, g \in \alpha(A)$, evident, $f + g$, $\lambda f \in \alpha(A)$. Dacă $f \in \alpha(A)$ și $g \in \mathscr{C}(X)$, atunci $(fg)(x) = f(x)g(x) = 0$, $\forall x \in A$, deci $fg \in \alpha(A)$. În sfîrșit, fie $f_n \in \alpha(A)$ și $f \in \mathscr{C}(X)$ cu $f_n \to f$ în $\mathscr{C}(X)$. În particular, $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in A$. Dar $f_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, ceea ce implică $f(x) = 0$, adică $f \in \alpha(A)$. Cu acestea, $\alpha(A)$ rezultă ideal închis. Dacă $A \subseteq B$ și $f \in \alpha(B)$, avem $f(x) = 0$, $\forall x \in B$, deci cu atît mai mult $f(x) = 0$, $\forall x \in A$, adică $f \in \alpha(A)$. În particular, $\alpha(\overline{A}) \subseteq \alpha(A)$. Invers, fie $f \in \alpha(A)$, adică $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$. Deoarece f este continuă, $f^{-1}(\{0\})$ este închis, deci $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\{0\})$, adică $f \in \alpha(\overline{A})$. b) f fiind continuă, $f^{-1}(\{0\})$ este închis, deci $\beta(\mathscr{I})$ este mulțime închisă, ca intersecție de mulțimi închise. Fie $f \in \mathscr{I}$. Dacă $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, ar urma $f(x) \neq 0$, $\forall x \in X$. Deci $g(x) = 1/f(x)$ ar fi o funcție continuă pe X. Apoi $1 = gf \in \mathscr{I}$

deoarece $\mathcal{J}$ este ideal, ceea ce ar implica $\mathcal{J} = \mathcal{C}(X)$. $\mathcal{J}$ fiind presupus propriu, deducem $f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, $\forall f \in \mathcal{J}$. Fie apoi $f_1, f_2 \in \mathcal{J}$. Notînd $f(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x)$, avem $f \in \mathcal{J}$ și $f(x) = 0$ dacă și numai dacă $f_1(x) = f_2(x) = 0$, de unde $\emptyset \neq f^{-1}(\{0\}) \subseteq f_1^{-1}(\{0\}) \cap f_2^{-1}(\{0\})$. Rezultă că $\{f^{-1}(\{0\}) \mid f \in \mathcal{J}\}$ este o familie de mulțimi închise în X, avînd proprietatea intersecției finite. Compactitatea lui X implică $\beta(\mathcal{J}) \neq \emptyset$. Fie $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_2$ și $x \in \beta(\mathcal{J}_2)$. Rezultă $f(x) = 0$, $\forall f \in \mathcal{J}_2$, deci $f(x) = 0$, $\forall f \in \mathcal{J}_1$, adică $x \in \beta(\mathcal{J}_1)$. c) Dacă $f_0 \in \mathcal{J}$, avem $\beta(\mathcal{J}) = \bigcap_{f \in \mathcal{J}} f^{-1}(\{0\}) \subseteq f_0^{-1}(\{0\})$ deci, conform definiției, $f_0 \in \alpha(\beta(\mathcal{J}))$. $\alpha(\beta(\mathcal{J}))$ fiind ideal închis, urmează $\overline{\mathcal{J}} \subseteq \alpha(\beta(\mathcal{J}))$. Apoi $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$, pentru orice $f \in \alpha(A)$, deci $\overline{A} \subseteq \bigcap_{f \in \alpha(A)} f^{-1}(\{0\}) = \beta(\alpha(A))$. $\beta(\alpha(A))$ fiind închis, rezultă $\overline{A} \subseteq \beta(\alpha(A))$. Fie acum $x_0 \notin \overline{A}$ și $f \in \mathcal{C}(X)$ încît $f(x_0) = 1$ și $f(x) = 0$, $\forall x \in A$. $f \in \alpha(A)$ iar $x_0 \notin f^{-1}(\{0\})$ implică $x_0 \notin \beta(\alpha(A))$, de unde $\beta(\alpha(A)) \subseteq \overline{A}$. Mai rămîne de arătat că $\alpha(\beta(\mathcal{J})) \subseteq \overline{\mathcal{J}}$. Să considerăm pe X următoarea relație de echivalență: $x \sim y$ dacă și numai dacă: fie $x = y$, fie $x, y \in \beta(\mathcal{J})$. Spațiul cît $\widetilde{X} = X/\sim$ este compact. Pentru ca să existe $g: \widetilde{X} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f = g \circ \pi$ ($\pi: X \to \widetilde{X}$ fiind proiecția canonică) este necesar și suficient ca f să fie constantă pe $\beta(\mathcal{J})$. Dacă f este continuă, g este continuă și reciproc. Prin această identificare, $\alpha(\beta(\mathcal{J}))$ trece în algebra tuturor funcțiilor continue pe $\widetilde{X}$, care se anulează într-un punct x_0 (care corespunde lui $\beta(\mathcal{J})$). Conform teoremei lui Stone-Weierstrass, este suficient să arătăm că $\widetilde{\mathcal{J}}$ (funcțiile corespunzînd celor din $\mathcal{J}$) separă punctele lui $\widetilde{X}$. Fie întîi $x = x_0$, adică $x \notin \beta(\mathcal{J}) = \bigcap_{f \in \mathcal{J}} f^{-1}(\{0\})$. Rezultă că există $f_0 \in \mathcal{J}$ încît $f_0(x) \neq 0 = f(x_0)$. Apoi, fie $x \neq y$, $x \neq x_0$, $x_0 \neq y$ iar $f \in \mathcal{J}$ încît $f(x) \neq 0$. Dacă $f(x) = f(y)$, fie $g \in \mathcal{C}(X)$ încît $g(x) = 1$, $g(y) = 0$. Avem $fg \in \mathcal{J}$ iar $f(x) = (fg)(x)$ și $(fg)(y) = 0$, deci $(fg)(x) \neq (fg)(y)$, adică $\mathcal{J}$ separă punctele. d) Fie $\mathcal{M}$ ideal maximal, deci $\beta(\mathcal{M}) = \emptyset$. Deoarece funcția constantă 1 nu se anulează nicăieri, urmează $1 \notin \alpha(\beta(\mathcal{M}))$, ceea ce arată că $\alpha(\beta(\mathcal{M})) = \overline{\mathcal{M}}$ este ideal propriu. Maximalitatea lui $\mathcal{M}$ implică $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$. Fie $\mathcal{M}$ maximal, deci $\beta(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Fie $x \in \beta(\mathcal{M})$ și $\mathcal{J} = \alpha(\{x\})$, deci $\mathcal{J}$ este ideal propriu și $\mathcal{M} = \alpha(\beta(\mathcal{M})) \subseteq \alpha(\{x\}) = \mathcal{J}$, ceea ce implică $\mathcal{J} = \mathcal{M}$. Apoi: $\{x\} = \beta(\alpha(\{x\})) = \beta(\mathcal{J}) = \beta(\mathcal{M})$, ceea ce se scrie $\mathcal{M} = \alpha(\{x\})$ sau $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$. Reciproc, dacă $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\} = \alpha(\{x\})$, rezultă că $\mathcal{M}$ este ideal propriu. Dacă $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{M}$ este un alt ideal, urmează $\beta(\mathcal{J}) \subseteq \beta(\mathcal{M}) = \{x\}$, adică $\beta(\mathcal{J}) = \{x\}$ sau $\beta(\mathcal{J}) = \emptyset$. În primul caz $\mathcal{J} = \mathcal{M}$, în al doilea caz $\mathcal{J} = \mathcal{C}(X)$, ceea ce dovedește maximalitatea lui $\mathcal{M}$.

4. Fie $\mathcal{M} = \operatorname{Ker} \varphi = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \varphi(f) = 0\}$. Dacă $f, g \in \mathcal{M}$ atunci $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g) = 0$ și $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f) = 0$ deci $f + g, \lambda f \in \mathcal{M}$. Dacă $f \in \mathcal{M}$ și $g \in \mathcal{C}(X)$ atunci $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) = 0$, deci $\mathcal{M}$ este ideal. Să arătăm că este maximal. Fie $\mathcal{J}$ un ideal care conține $\mathcal{M}$ și este diferit de $\mathcal{M}$. Există deci $f_0 \in \mathcal{J}$ și $f_0 \in \mathcal{M}$, adică avem $\varphi(f_0) \neq 0$. Oricare ar fi $g \in \mathcal{C}(X)$, avem: $g = \varphi(g)\,[\varphi(f_0)]^{-1} f_0 + (g - \varphi(g)\,[\varphi(f_0)]^{-1} f_0)$. Deoarece $\varphi(g)\,[\varphi(f_0)]^{-1} f_0 \in \mathcal{J}$ iar $g - \varphi(g)\,[\varphi(f_0)]^{-1} f_0 \in \operatorname{Ker} \varphi \subseteq \mathcal{J}$, urmează $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{J}$. $\mathcal{M}$ fiind maximal, conform exercițiului 3, există $x_0 \in X$ unic, astfel încît $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x_0) = 0\}$. Rezultă că, pentru orice $g \in \mathcal{C}(X)$, funcția $f(x) = g(x) - g(x_0)$ este în $\mathcal{M}$. Avem apoi $\varphi(1) = 1$, căci φ este omomorfism de algebre nenul, de unde: $\varphi(g) = \varphi(g - g(x_0) + g(x_0)) = \varphi(g(x_0)) = g(x_0)$. Pentru continuitate, este suficient să observăm că: $|\varphi(f)| = |f(x_0)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|$.

5. Fie $A \subseteq X$ mărginită. Notînd $S_r = \{x \mid \|x\| < r\}$, există M astfel încît $A \subseteq MS_1$, adică $\|x\| \leqslant M$, $\forall x \in A$. Reciproc, dacă $\|x\| \leqslant M$, oricare ar

fi $x \in A$, iar V este o vecinătate a originii, există $r>0$ încît $S_r \subseteq V$. Atunci $A \subseteq Mr^{-1}S_r \subseteq Mr^{-1}V$, ceea ce arată că A este mărginită.

6. Să verificăm că aplicația definită este o normă. Este evident că $\| x_0+Y \| \geqslant 0$, $\forall x_0 \in X$ și $\| 0 + Y \| = 0$. Dacă $\| x_0 + Y \| = 0$, înseamnă că, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, există $x_n \in X$ astfel încît $x_n - x_0 \in Y$ și $\| x_n \| \leqslant n^{-1}$. Rezultă că $x_n \to 0$. Deoarece Y este închis, deducem $x_0 \in Y$, adică $x_0 + Y = 0$ în X/Y. Pentru $\lambda \neq 0$ avem: $\| \lambda x_0 + Y \| = \inf \{ \| x \| \mid x - \lambda x_0 \in Y \} = \{ \| \lambda y \| \mid y - x_0 \in Y \} = |\lambda| \inf. \{ \| y \| \mid y - x_0 \in Y \} = |\lambda| \| x_0 + Y \|$. Pentru $\lambda = 0$, egalitatea de mai sus este evidentă. $\| x_0 + y_0 + Y \| = \inf \{ \| x \| \mid x - (x_0 + y_0) \in Y \} \leqslant \inf. \{ \| x' + x'' \| \mid x' - x_0 \in Y$ și $x'' - y_0 \in Y \} \leqslant \inf \{ \| x' \| \mid x' - x_0 \in Y \} + \inf \{ \| x'' \| \mid x'' - y_0 \in Y \} = \| x_0 + Y \| + \| y_0 + Y \|$. Notînd $p: X \to X/Y$ surjecția canonică, o mulțime $D \subseteq X/Y$ este deschisă dacă și numai dacă $p^{-1}(D)$ este deschisă. Fie $S_r = \{ x + Y \mid \| x + Y \| < r \}$. Ținînd seama de definiția normei, avem: $p^{-1}(S_r) = \{ y \mid \exists\, x, \| x \| < r$ și $x - y \in Y \} = S_r + Y$. Dar $S_r \subseteq X$ este deschisă, deci $p^{-1}(S_r)$ este deschisă. Reciproc, fie V o vecinătate deschisă a originii în X/Y, deci $p^{-1}(V)$ este deschisă. Există deci $r > 0$ încît $S_r \subseteq p^{-1}(V)$, de unde $p(S_r) = S_r \subseteq p(p^{-1}(V)) = V$, ceea ce arată că topologia cît coincide cu topologia dată de normă.

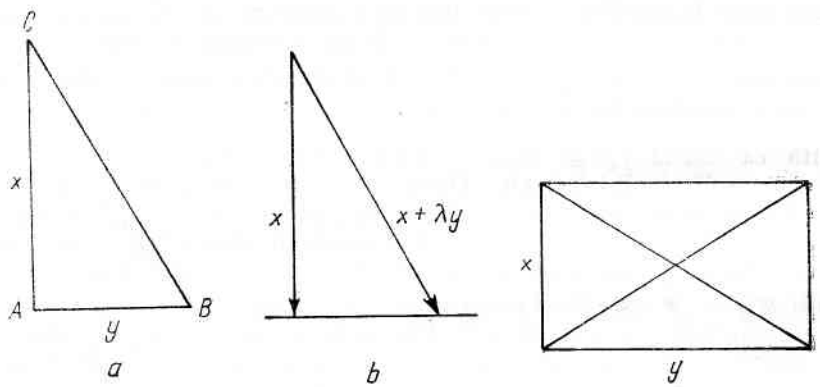

Fig. 10

7. a) Norma fiind continuă, $S'(x,r)$ este închisă, deci $\overline{S(x,r)} \subseteq S'(x,r)$. Invers, dacă $y \in S'(x,r)$, avem $\| x - y \| \leqslant r$. Fie $z_\alpha = x + \alpha(y - x)$. Dacă $0 < \alpha < 1$, avem: $\| x - z_\alpha \| = \| \alpha(y - x) \| < r$ deci $z_\alpha \in S(x,r)$. Dacă $\alpha \to 1$, avem $z_\alpha \to y$, adică $y \in \overline{S(x,r)}$. Tot din continuitatea normei, $S(x,r)$ este deschisă, deci $S(x,r) \subseteq \overset{\circ}{S'(x,r)}$ Invers, fie $y \in \overset{\circ}{S'(x,r)}$, deci există $\varepsilon > 0$ încît $S(y,\varepsilon) \subseteq S'(x,r)$. Fie $z = y + \frac{\varepsilon}{2r}(y - x)$. Avem: $\| z - y \| = \| \frac{\varepsilon}{2r}(y - x) \| < \varepsilon$, deci $z \in S(y, \varepsilon) \subseteq S'(x,r)$, de unde $\| z - x \| = \left\| \left(1 + \frac{\varepsilon}{2r}\right)(y - x) \right\| < r$, adică $\| y - x \| < r$, sau $y \in S(x, r)$. În sfîrșit, ținînd seama că $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, din ultimele relații rezultă: $\partial S(x,r) = \overline{S(x,r)} \setminus S(x,r) = S'(x,r) \setminus S'(x,r) = \{ y \mid \| x - y \| = r \}$ și $\partial S'(x,r) = S'(x,r) \setminus \overset{\circ}{S'(x,r)} = S'(x,r) \setminus S(x,r)$. b) Este suficient să arătăm că $S(0,1)$ este homeomorf cu X, căci $S(0,1)$ se obține din $S(x,r)$

printr-o translație și o omotetie nebanală. Definim $\varphi: X \to S(0,1)$ prin $\varphi(x) = (1 + \| x \|)^{-1} x$. Avem $\| \varphi(x) \| < 1$, deci este bine definită. Mai definim $\psi: S(0,1) \to X$ prin $\psi(y) = (1 - \| y \|)^{-1} y$. Vom arăta că ψ este inversa lui φ. Dacă $y \in S(0,1)$, avem $\| y \| < 1$, deci ψ este bine definită. Apoi $\psi(\varphi(x)) = (1 - \| x \|(1 + \| x \|)^{-1})^{-1} (1 + \| x \|)^{-1} x = x$ și $\varphi(\psi(y)) = (1 + \| y \|(1 - \| y \|)^{-1})^{-1} \cdot (1 - \| y \|)^{-1} y = y$. În sfîrșit, norma fiind continuă, φ și ψ sînt continue deci φ este homeomorfism.

8. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune $\| x \| \geq \| y \|$. Atunci: $\| x - y \| \geq \| x - \| x \| \| y \|^{-1} y \| - \| \| x \| \| y \|^{-1} y - y \| = \| x \| \| \| x \|^{-1} x - \| y \|^{-1} y \| - \| x - y \|$, de unde prima inegalitate. Pentru a doua inegalitate, este suficient să observăm că $2\sup(\| x \|, \| y \|) \geq \| x \| + \| y \|$. În sfîrșit, să alegem x încît $\| x \| = 1$, iar $y = \mu x$, cu $\mu < 0$. Primul membru este deci $1 - \mu$, iar membrul doi: $\max(1, -\mu)$. Pentru $\mu \to 0$ ambii membri tind la 1, ceea ce arată că factorul $1/2$ nu poate fi mărit.

9. Notăm $u = (u_n)$, $v = (v_n)$, unde $u_n = x_n$ dacă $x_n \geq 0$ și $u_n = 0$ în rest; iar $v_n = -x_n$ dacă $x_n \leq 0$ și $v_n = 0$ în rest. Din construcție, $u, v \in C$ și $x = u - v$. Fie $x \in C$ și $\varepsilon > 0$. Din $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n | < +\infty$ rezultă că există n_ε încît $x_n < 1/2\,\varepsilon$, pentru $n \geq n_\varepsilon$. Dacă toți $x_n \neq 0$, fie $y_p = x_p$ dacă $p < n_\varepsilon$, $y_n = -1/2\,\varepsilon$ și $y_p = 0$ dacă $p > n_\varepsilon$. Atunci $y \in l^1$, dar $y \notin C$, în timp ce $\| x - y \| < \varepsilon$. Dacă nu, alegem $n \in \mathbf{N}$ încît $0 \neq x_n < 1/2\,\varepsilon$ și definim $y = (y_n)$ prin $y_p = x_p$ dacă $p \neq n$ și $y_n = -x_n$. Din nou $y \in l^1$, $y \notin C$ iar $\| x - y \| < \varepsilon$, deci în ambele cazuri $S(x, \varepsilon) \not\subseteq C$, ceea ce arată că $\overset{\circ}{C} = \varnothing$.

10. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^q$ fiind convergentă, există n_1 încît $| x_n | < 1$, $\forall n \geq n_1$. Vom avea deci $| x_n |^p \leq | x_n |^q$ pentru orice $n \geq n_1$, ceea ce arată că $x \in l^p$. Faptul că toți termenii sînt majorați, de la un rang încolo, în modul de 1, asigură că $x \in m$. Dacă $x = 0$, egalitatea propusă este evidentă. Dacă nu, $\| x \| > 0$, și, oricare ar fi $0 < \alpha < \| x \|$, există n_α încît $| x_n | < \alpha$, oricare ar fi $n \geq n_\alpha$. Mulțimea $S_\alpha = \{n \in \mathbf{N} \mid | x_n | \geq \alpha\}$ este deci finită și nevidă. Avem $\| x \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p \right)^{1/p} \geq \alpha \, (\text{card } S_\alpha)^{1/p}$. Pentru $p \to \infty$ avem $\liminf_{p \to \infty} \| x \|_p \geq \alpha$, deci $\liminf_{p \to \infty} \| x \|_p \geq \| x \|$, căci α era arbitrar. Fie, în continuare, $\varepsilon \in (0,1)$ și $\| x \| = 1$. Există n_0 încît $\sum_{k=n_0}^{\infty} | x_k |^q < \varepsilon$. Înlocuind, eventual, n_0 cu $\sup\{n_0, n_1\}$, avem $| x_k |^p \leq | x_k |^q$, pentru $k \geq n_0$, deci $\sum_{k=n_0}^{\infty} | x_k |^p < \varepsilon$, pentru orice $p \geq q$. Putem scrie $\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n_0} | x^k |^p + \varepsilon \right)^{1/p} \leq (n_0 \| x \| + \varepsilon)^{1/p} \leq (n_0 + 1)^{1/p}$, deci $\limsup_{p \to \infty} \| x \|_p \leq 1$. Dacă x este oarecare, rezultă cu ușurință $\limsup_{p \to \infty} \| x_p \| \leq \| x \|$, adică $\lim_{p \to \infty} \| x \|_p$ există și este $\| x \|$. Pentru un rezultat analog în L^p vezi [12].

11. Conform teoremei lui Arzela — Ascoli, este suficient să arătăm că A este echicontinuă și că pentru fiecare $x \in [0,1]$, $\{f(x) \mid f \in A\}$ este o mulțime mărginită. Fie $M = \sup | f'(x) |$. Oricare ar fi $t, t_0 \in [0,1]$, avem $| f(t) - f(t_0) | \leq | f'(\xi) | \, | t - t_0 | \leq M | t - t_0 |$ pentru orice $f \in A$, ceea ce arată că A este echicon-

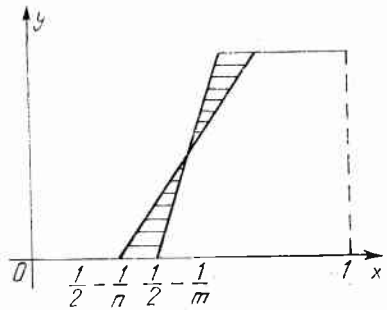

Fig. 11

tinuă. Dacă $x\in[0,1]$ este fixat avem, oricare ar fi $f\in A$: $|f(x)|\leqslant|f(x)-f(0)|+|f(0)|\leqslant$ $\leqslant|f'(\xi)|x+N\leqslant Mx+N$, unde $N=\sup_{f\in A}|f(0)|$ este finit. Rezultă că ipotezele din teorema lui Arzela-Ascoli sînt îndeplinite, deci A este relativ compact în $\mathcal{C}([0,1])$.

12. Prin calcul, sau observînd că integrala reprezintă aria a două triunghiuri (conform figurii 11), se găsește: $\|f_n-f_m\|_1=\int_0^1|f_n(t)-f_m(t)|\,dt=1/2\,|\,n^{-1}-m^{-1}|$, ceea ce arată că $\{f_n\}$ este șir Cauchy. Să presupunem că există $f_0\in\mathcal{C}([0,1])$ încît $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f_0\|_1=0$. Să fixăm $n_0\in\mathbf{N}$. Avem: $\|f_n-f_0\|_1=$ $=\int_0^1|f_n(t)-f_0(t)|\,dt\geqslant\int_0^{\frac12-\frac{1}{n_0}}|f_n(t)-f_0(t)|\,dt\geqslant\int_0^{\frac12-\frac{1}{n_0}}|f_0(t)|\,dt$ și $\|f_n-f_0\|_1=$ $=\int_0^1|f_n(t)-f_0(t)|\,dt\geqslant\int_{\frac12+\frac{1}{n_0}}^1|f_n(t)-f_0(t)|\,dt\geqslant\int_{\frac12+\frac{1}{n_0}}^1|1-f_0(t)|\,dt$, oricare ar fi $n\geqslant n_0$, de unde: $\int_0^{\frac12-\frac{1}{n_0}}|f_0(t)|\,dt=0$ și $\int_{\frac12+\frac{1}{n_0}}^1|1-f_0(t)|\,dt=0$. Deducem $f_0(t)=0$, $\forall t\in[0,1/2-n_0^{-1}]$ și $f_0(t)=1$, $\forall t\in[1/2+n_0^{-1},1]\cdot n_0$ fiind oarecare, găsim: $\lim_{t\nearrow1/2}f_0(t)=0$ și $\lim_{t\searrow1/2}f_0(t)=1$, deci f_0 nu are limită în $1/2$, în contradicție cu $f_0\in\mathcal{C}([0,1])$.

13. a) Fie $\{f_i\}$ un șir generalizat, convergent la f punctual. Deci $f_i(t)\to f(t)$, $\forall t\in[0,1]$, adică $\varphi_t(f_i)\to\varphi_t(f)$ b) Vom arăta că φ_0 este discontinuă, cazul general tratîndu-se analog. Fie $f_n(t)=nt$ dacă $t\in[0,n^{-1}]$ și $f_n(t)=1$ dacă $t\in(n^{-1},1]$. Avem: $\|f_n-1\|_1=\int_0^1|f_n(t)-1|\,dt=\int_0^{\frac1n}|nt-1|\,dt=n^{-1}$, deci $f_n\to1$ în normă dar $\varphi_0(f_n)=0$, în timp ce $\varphi_0(1)=1$.

14. A fiind o vecinătate convexă și echilibrată a originii, p_A este o seminormă. Dacă $p_A(x)=0$, rezultă $x\in\lambda A$. $\forall\lambda>0$. A fiind mărginită, urmează $x\in V$, pentru fiecare vecinătate V a originii. X fiind separat, deducem $x=0$, deci p_A este normă. Fie atunci X s.l.t. separat. Dacă topologia este dată de o normă, $\{x\,|\,\|x\|\leqslant1\}$ este o mulțime nevidă, deschisă, convexă și mărginită. Reciproc, fie X s.l.t. separat și B o parte nevidă, deschisă, convexă și mărginită. Dacă $x_0\in B$, $B-x_0$ este o mulțime deschisă, convexă, mărginită și care conține originea. Există deci W deschisă, $0\in W$, $W\subseteq B-x_0$ și W echilibrată. Notînd $A=\operatorname{co}W$, avem $0\in A$; A este deschisă conform ex. III.16, A este echilibrată conform ex. III.1, A este convexă prin construcție, și este mărginită deoarece $A\subseteq B-x_0$. Deci p_A este o normă pe X. Deoarece $A=\{x\,|\,p_A(x)<1\}$, rezultă că topologia dată de p_A este mai puțin fină decît topologia lui X. Dacă V este o vecinătate a originii în X, fie $\lambda>0$ încît $\lambda A\subseteq V$.

Atunci $\{x \mid p_A(x) < \lambda\} \subseteq V$, ceea ce arată că topologia lui X este dată de norma p_A.

15. Dacă X este normabil, este, evident, local convex, fără nici o ipoteză suplimentară. Reciproc, fie X s.l.t. local convex și local mărginit. Există deci o vecinătate B a originii mărginită și un sistem fundamental de vecinătăți ale originii, deschise, convexe și echilibrate. Există deci o asemenea vecinătate $A \subseteq B$. A este atunci și mărginită. Aplicînd exercițiul 14, X rezultă normabil.

16. Dacă mulțimea I este finită, atunci $\prod_{i \in I} X_i \simeq \bigoplus_{i \in I} X_i$ și rezultatul este cunoscut. Reciproc, dacă I nu este finit, vom arăta că nu există nici o vecinătate mărginită a originii. Conform definiției, dacă $V \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ este o vecinătate a originii, există $i_1, \ldots, i_n$ și $V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}$ vecinătăți ale originii în X_{i_k} astfel încît $\prod_{i \in I} V_i \subseteq V$, unde $V_i = X_i$ pentru $i \neq i_1, \ldots, i_n$. Mulțimea I fiind infinită, există $i_0 \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$. Să notăm S_0 sfera unitate în X_{i_0} și $V_0 = \prod_{i \in I} V_i'$, unde $V_i' = X_i$ dacă $i \neq i_0$ iar $V_{i_0} = S_0 \cdot V_0$ este vecinătate a originii în $\prod_{i \in I} X_i$, dar nu există $\lambda \neq 0$ astfel încît $\lambda V \subseteq V_0$, deci V nu este mărginită.

17. $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ este s.l.t. față de topologia produs, după exercițiul III.28. Fiind produs numărabil de spații topologice metrizabile, este metrizabil. De asemenea $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ este local convex. Dacă ar exista o vecinătate mărginită a originii, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ar fi normabil pe baza exercițiului 15. Acest fapt ar contrazice exercițiul 16, mulțimea $\mathbf{N}$ fiind infinită. $\mathbf{R}$ fiind complet, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ este complet față de orice metrică invariantă la translații, deci este spațiu Fréchet (conform ex. III.51). După exercițiul 14, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ nu este normabil.

18. Fie $\sigma: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ o bijecție. Să arătăm că $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}$ converge la x în c_0. Fie $\varepsilon > 0$ și n_ε astfel încît $|x_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant n_\varepsilon$. Mulțimea $\sigma^{-1}(\{1, \ldots, n_\varepsilon\})$ fiind finită, să notăm $n_\varepsilon' = \max \sigma^{-1}(\{1, \ldots, n_\varepsilon\})$. Deci $n \geqslant n_\varepsilon'$ implică $\sigma(n) \geqslant n_\varepsilon$. Pe de altă parte, fie $y = (y_n)$ definit de $y_n = x - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)}$. Se observă că: $y_k = 0$ dacă $k \in \sigma\{1, \ldots, n\}$ și $y_k = x_k$ dacă nu. De aici urmează că, oricare ar fi $n \geqslant n_\varepsilon'$, avem: $\| x - \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)} \| \leqslant \sup_{k \geqslant n_\varepsilon} |x_k| \leqslant \varepsilon$.

Deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n e_n \| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, seria considerată converge absolut dacă și numai dacă $x \in l^1$. Dar $c_0 \setminus l^1 = \varnothing$, deoarece, de exemplu, $(1, 1/2 \ldots, n^{-1}, \ldots) \in c_0 \setminus l^1$. Acest exemplu arată că există cazuri în care seria dată nu converge absolut.

19. Γ $y_0 \subseteq X$ este un subspațiu liniar, iar f_0 definită ca în enunț este liniară. Să mai definim $p: X \to \mathbf{R}_+$ prin $p(x) = \|x\| \|y_0\|$. Această aplicație este o seminormă pe X iar $|f_0(\alpha y_0)| = |\alpha| \, \|y_0\|^2 = \|\alpha y_0\| \|y_0\| = p(\alpha y_0)$. Rezultă că putem aplica teorema lui Hahn-Banach. Există o aplicație liniară $F_{y_0}: X \to \Gamma$, astfel încît: $F_{y_0}(\alpha y_0) = \alpha \|y_0\|^2$, $\forall \alpha \in \Gamma$ și $|F_{y_0}(x)| \leqslant \|x\| \|y_0\|$, $\forall x \in X$. Să definim $[x, y] = F_y(x)$. α) rezultă din faptul că fiecare F_y este liniar. β) rezultă din: $[x, x] = F_x(x) = \|x\|^2 > 0$ dacă $x \neq 0$. Această rela-

ție furnizează și δ). În sfîrșit, avem: $|[x, y]| = |F_y(x)| \leqslant \|x\| \|y\|$, ceea ce dovedește γ).

20. a) Orice șir convergent la 0 fiind mărginit, seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1}x_n$ este convergentă, deci f este bine definită. Avem: $f(\lambda x + \mu y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1}(\lambda x_n + \mu y_n) =$ $= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1}x_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1}y_n = \lambda f(x) + \mu f(y)$, deci f este liniară. Dacă $x \in c_0$, avem: $|f(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1}x_n| \leqslant \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} = 2\|x\|$, ceea ce arată că f este continuă și $\|f\| \leqslant 2$. Fie, pentru $m \in \mathbf{N}$ arbitrar, $x^{(m)} \in c_0$ definit prin: $x_n^{(m)} = 1$ dacă $m \geqslant n$ și $x_n^{(m)} = 0$ dacă $m < n$. Atunci $\|x^{(m)}\| = 1$ și $\|f\| \geqslant |f(x)^{(m)}| = \sum_{n=1}^{m} 2^{-n+1}$. Deoarece m este arbitrar, rezultă $\|f\| = 2$. b) Cu exercițiul 24 avem $d(x, \operatorname{Ker} f) =$ $= 1/2\,|f(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_n|$. Oricare ar fi $y \in \operatorname{Ker} f$, avem: $f(1/2y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}y_n = 0$ deci: $d(x, \operatorname{Ker} f) = |\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(x_n - y_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_n| \leqslant \|x - y\|$. În ultima inegalitate putem avea egalitate dacă și numai dacă $|x_n - y_n| =$ $= \|x - y\|$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Dar $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, deci avem egalitate dacă și numai dacă $x = y$. Dacă $f(x) \neq 0$, rezultă că ultima inegalitate este strictă, adică $\|x - y\| > d(x, \operatorname{Ker} f)$, oricare ar fi $y \in \operatorname{Ker} f$. Rezultă că nici un $x \in c_0$ cu $f(x) \neq 0$ nu admite element de cea mai bună aproximare în $\operatorname{Ker} f$.

21. a) Fie φ: $\mathcal{C}([0,1]) \to \mathbf{R}$ definită prin $\varphi(f) = f(0)$. Se verifică ușor că φ este liniară. Din $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$ rezultă că φ este continuă. Deoarece $A = \operatorname{Ker} \varphi$, urmează că A este subspațiu liniar maximal închis în $\mathcal{C}([0,1])$. În particular, A este convex. b) Din cele de mai sus $\|\varphi\| \leqslant 1$, deci, cu exercițiul 24, avem $d(f_0, A) \geqslant |\varphi(f_0)| = 1$. Fie f_n: $[0,1] \to \mathbf{R}$ definite prin $f_n(t) = nt$ dacă $t \in [0, n^{-1}]$ și $f(t) = 1$ în rest. Avem $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$, $f_n(0) = 0$ deci $f_n \in A$ iar $\|f_n - f_0\| =$ $= \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_0(t)| + \int_0^1 |f_n(t) - f_0(t)|\,dt = 1 + (2n)^{-1}$, ceea ce arată că $d(f_0, A) = 1$. În sfîrșit, oricare ar fi $f \in A$ avem: $\|f - f_0\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - f_0(t)| +$ $+ \int_0^1 |f(t) - f_0(t)|\,dt \geqslant 1 + \int_0^1 |f(t) - f_0(t)|\,dt$. f fiind continuă, există $\alpha > 0$ încît $|f(x)| \leqslant 1/2$, oricare ar fi $x \in [0,1]$ cu $x \leqslant \alpha$. Urmează că: $\int_0^1 |f(t) - f_0(t)|\,dt \geqslant$ $\geqslant \int_0^\alpha |f(t) - f_0(t)|\,dt \geqslant 1/2\alpha$, adică $\|f - f_0\| \geqslant 1 + 1/2\,\alpha > 1$.

22. a) Să definim φ_i: $L^i([0,1]) \to \mathbf{R}$ prin $\varphi_i(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ $(i = 1,2)$. Avem $|\varphi_1(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1$, deci φ_1 este continuă. Din inegalitatea lui Hölder rezultă: $|\varphi_2(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} =$ $= \|f\|_2$ deci φ_2 este continuă. Deoarece $M_i = \{f \in L^i([0,1]) \mid \varphi_i(f) = 1\}$, rezultă că M_1, M_2 sînt hiperplane închise, în particular convexe. b) Dacă $f \in M_2$, inegali-

tatea stabilită la punctul precedent arată că $\|f\|_2 \geqslant 1$. Dacă $f_0(t)=1$, $\forall t\in[0,1]$, avem $f_0 \in M_2$ și $\|f_0\|_2 = 1$. Dacă $f \in M_2$ satisface $\|f\|_2 = 1$, avem $\|f - f_0\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|f_0\|_2^2) - \|f+f_0\|_2^2$. Cum $1/2\,(f+f_0) \in M_2$, urmează că $\|f+f_0\|_2^2 \geqslant 4$, de unde $\|f-f_0\|_2^2 \leqslant 0$, adică $f=f_0$, ceea ce demonstrează unicitatea lui f_0. c) Dacă $f\in M_1$, inegalitatea stabilită la pct. a) arată că $\|f\|_1 \geqslant 1$. Dacă $f\in M_1$ și $f \geqslant 0$, atunci $1 = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1$ deci, oricare ar fi $g\in M_1$, cu $g\geqslant 0$, avem realizată egalitatea din enunț. Există o infinitate de asemenea funcții: de exemplu, $g_\alpha(t) = (\alpha+1)t^\alpha$, cu $\alpha\geqslant 0$.

23. Fie c mulțimea șirurilor convergente de numere reale. c este subspațiu liniar în m. Pentru $s=(s_n)\in c$, avem $q(s) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, q fiind funcționala convexă definită în exercițiul II.10. Conform teoremei lui Hahn-Banach, există o funcțională liniară LIM: $m \to \mathbf{R}$ astfel încît LIM $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, $\forall s\in c$ și LIM$s \leqslant q(s)$, $\forall s\in m$. Deci b) este demonstrat. Alegînd $p=1$, $n_1=0$, găsim LIM$s \leqslant q(s) \leqslant \limsup\limits_{k\to\infty} s_k$. Aplicînd această inegalitate șirului $(-s)$, obținem: LIM $s = -$ LIM$(-s) \geqslant -\lim\limits_{k\to\infty}\sup(-s_k) = \lim\limits_{k\to\infty}\inf s_k$, ceea ce dovedește d). Dacă $s\geqslant 0$, avem $\liminf\limits_{k\to\infty} s_k \geqslant 0$, ceea ce dovedește a). Pentru c), vom arăta că $q(s-s') \leqslant 0$. Va fi suficient să arătăm că, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$, avem $q(s-s') \leqslant n^{-1}(\sup s_n - \inf s_n)$. Pentru aceasta, să alegem, pentru fiecare p, $n_i = i (i=1,\ldots,p)$. Avem: $q(s-s') \leqslant \sup\limits_k p^{-1}\sum\limits_{i=1}^{p}(s_{k+i} - s_{k+i+1}) = \sup\limits_k p^{-1}(s_{k+1} - s_{k+n+1}) \leqslant p^{-1}\sup s_n - p^{-1}\inf s_n$. Un calcul analog arată că $q(s'-s)\leqslant 0$, de unde LIM $(s-s')\leqslant q(s-s')\leqslant 0$ și LIM $(s'-s)\leqslant q(s'-s)\leqslant 0$, adică c).

24. Dacă $x\in H$, relația este evidentă. Dacă $x\notin H$, avem $\|f\| = \sup\limits_{u\neq 0}\|u\|^{-1}|f(u)| = \sup\limits_{x\neq y}\|x-y\|^{-1}|f(y-x)| \geqslant \sup\limits_{f(y)=\alpha}\|x-y\|^{-1}|f(x)-\alpha| = (d(x,H))^{-1}|f(x)-\alpha|$, de unde $d(x,H) \geqslant \|f\|^{-1}\,|f(x)-\alpha|$. Reciproc, deoarece $\|f\| = \sup\limits_{\|u\|=1}|f(u)|$ și $f\neq 0$, există $\{u_n\}$ încît $\|u_n\|=1$, $|f(u_n)|\to\|f\|$ și $f(u_n)\neq 0$. Deci $u_n \notin \mathrm{Ker}\, f$. Deoarece $\mathrm{Ker}\, f$ este subspațiu liniar maximal, există $\lambda\in\Gamma$ și $y\in\mathrm{Ker}\, f$, astfel încît $x = y + \lambda u_n$. Avem $z = y + (f(u_n))^{-1}\alpha u_n \in H$, deci $d(x,H) = \inf\limits_{z\in H}\|x-z\| \leqslant \|(y+u_n) - (y+(f(u_n))^{-1}\alpha u_n)\| = (|f(u_n)^{-1}|\,|f(\lambda u_n) - \alpha|\,\|u_n\| = (|f(u_n)|)^{-1}|f(x)-\alpha|$.

25. a) Să presupunem întîi că $\|x_n\|=1$, $\forall n\in\mathbf{N}$. Deoarece $\|x_n + x_m\|\to 2$, din faptul că X este strict convex rezultă că, pentru fiecare $\varepsilon>0$, există n_ε, încît $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, $\forall m, n\geqslant n_\varepsilon$, ceea ce arată că $\{x_n\}$ este șir Cauchy, deci convergent. Fie acum $\{x_n\}$ oarecare. Deoarece $\|x_n\|\to 1$, cel mult un număr finit de termeni ai șirului sînt nuli. Putem deci presupune $x_n\neq 0$. Fie $y_n = \|x_n\|^{-1}x_n$. Avem $\|y_n\|=1$ și $\|y_n+y_m\|\to 2$. Conform celor de mai sus, $\{y_n\}$ este șir Cauchy. Dar: $\|x_n - x_m\| = \|\,\|x_n\|\,y_n - \|x_m\|\,y_m\| = \|(\|x_n\|-1)y_n + y_n - y_m + (1-\|x_m\|)y_m\| \leqslant |\,\|x_n\|-1\,| + \|y_n - y_m\| + |\,1-\|x_m\|\,|$, ceea ce arată că $\{x_n\}$ este șir Cauchy. b) Dacă notăm $d = \inf\limits_{x\in C}\|x\|$ și $d=0$, atunci $0\in C$ și afirmația este demonstrată. Dacă $d>0$, fie $x_n\in C$ astfel încît $\|x_n\|\to d$. C fiind mulțime convexă, avem $\|1/2\,(x_n+x_m)\|\geqslant d$, de unde $\|x_n+x_m\|\to 2d$. Deci $y_n = d^{-1}x_n$ satisface ipotezele de la punctul precedent,

deci este convergent. Rezultă că $\{x_n\}$ converge la un element $x_0 \in C$, care este, evident, de normă minimă. Fie $y_0 \in C$ un alt element de normă minimă. Deci $\|x_0\| = \|y_0\| = d$. Dacă $x_0 \neq y_0$ și luăm $\varepsilon = d^{-1}\|x_0 - y_0\|$, rezultă că există δ_ε încît $1 = \|(2d)^{-1}(x_0 + y_0)\| < 1 - \delta_\varepsilon$, contradicție. Deci elementul de normă minimă este unic. c) Fie $f \in X^* \setminus \{0\}$ și $H = \{x \mid f(x) = \|f\|\}$. H este mulțime convexă și închisă. Conform exercițiului 24, avem $d(0, H) = 1$. Din cele de mai sus rezultă existența unui element unic x_0 încît $f(x_0) = \|f\|$ și $\|x_0\| = 1$.

26. Pentru demonstrația punctelor a), b), c), d) se poate consulta [4]. e) Este o consecință imediată a inegalităților de la punctele precedente: dacă $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$, atunci $1/2\|f + g\|_p \leqslant (1 - \|1/2(f-g)\|_p^p)^{1/p}$ dacă $p \geqslant 2$ și $1/2\|f+g\|_p \leqslant (1 - \|1/2(f-g)\|_p^q)^{1/q}$ dacă $1 < p < 2$.

27. Se știe că spațiile l^p ($p \geqslant 1$) admit bază Schauder. Urmează că aceste spații sînt separabile. Se știe că dualul lui c este l^1. Conform exercițiului VII.25, urmează că c este separabil. c_0 este separabil ca subspațiu al lui c. În sfîrșit, bv fiind izometric cu l^1, rezultă separabil. Pentru a arăta că m nu este separabil, să introducem $A = \{(x_n) \mid x_n = 0 \text{ sau } 1\}$. A nu este o mulțime numărabilă: dacă ar exista o bijecție $\varphi: \mathbf{N} \to A$, să definim șirul (x_n) astfel: $x_n = 0$ dacă componenta de pe locul n a șirului $\varphi(n)$ este 1, și $x_n = 1$, în caz contrar. Evident, $(x_n) \in A$, dar $(x_n) \notin \varphi(\mathbf{N})$. Fie acum B o parte densă în m. Dacă B ar fi numărabilă, arătăm că se ajunge la contradicție. În adevăr, pentru fiecare $x \in A$ putem alege un element $f(x) \in B \cap S(x, 1/2)$. Dacă $x \neq y$, avem $\|x - y\| = 1$, ceea ce arată că $f(x) \neq f(y)$. Rezultă că $f: A \to B$ este injectivă, ceea ce reprezintă o contradicție.

28. Evident, $\|0\| = 0$. Dacă $\|f\| = 0$, urmează $f(0) = 0$ și $\overset{1}{\underset{0}{\vee}} f = 0$, adică, pentru orice $x \in [0,1]$: $|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant \overset{1}{\underset{0}{\vee}} f = 0$, deci, $f = 0$. Apoi: $\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \overset{1}{\underset{0}{\vee}}(\lambda f) = |\lambda|\|f\|$ și $\|f + g\| = |f(0) + g(0)| + \overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f+g) \leqslant \|f\| + \|g\|$. Fie $\{f_n\}$ un șir Cauchy în BV. Fiind mărginit, rezultă că există M încît $\overset{1}{\underset{0}{\vee}} f_n \leqslant M, \forall n \in \mathbf{N}$. Deoarece $|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant \|f\|$, deducem că $\{f_n(x)\}$ este șir Cauchy, $\forall x \in [0,1]$, deci există $f(x)$ încît $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in [0,1]$. Conform unui rezultat cunoscut [18, pg. 128], rezultă că $f \in BV$. Să mai arătăm că $\|f_n - f\| \to 0$. Deoarece $f_n(0) \to f(0)$, este suficient să arătăm că $\overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f_n - f) \to 0$. Fie $\varepsilon > 0$ și n_ε încît $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, $\forall m, n \geqslant n_\varepsilon$. Șirul $\{f_{n_\varepsilon} - f_m\}$ converge punctual la $f_{n_\varepsilon} - f$, iar funcțiile $f_{n_\varepsilon} - f_m$ sînt cu variație egal mărginită, căci $\overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f_{n_\varepsilon} - f_m) \leqslant \overset{1}{\underset{0}{\vee}} f_{n_\varepsilon} + \overset{1}{\underset{0}{\vee}} f_m$. Pe baza rezultatului menționat mai sus, avem: $\overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f_n - f) \leqslant \sup_m \overset{1}{\underset{0}{\vee}}(f_{n_\varepsilon} - f_m) \leqslant \sup_m \|f_{n_\varepsilon} - f_m\| < \varepsilon$. Pentru a arăta că BV nu este separabil, să definim $f_t(x) = 0$ dacă $x \neq t$ și $f_t(t) = 1$. Mulțimea $A = \{f_t \mid t \in [0,1]\}$ este o parte nenumărabilă din BV. Dacă $t \neq t'$, avem $\|f_t - f_{t'}\| = 4$. Aceste fapte asigură că raționamentul din exercițiul precedent rămîne valabil.

29. Conform teoremei lui Weierstrass, mulțimea polinoamelor cu coeficienți raționali este densă în $\mathcal{C}([0,1])$. Această mulțime fiind, evident, numărabilă, $\mathcal{C}([0,1])$ rezultă separabil.

30. Dacă $f = 0$, avem $\|f_n\| \to 0$, deci afirmația este adevărată. Dacă $f \neq 0$, putem presupune că $\|f_n\| = \|f\| = 1$. Dacă $\{f_n\}$ nu converge tare la f, există $\alpha < 1$ și un șir $\{f_{n_k}\}$ astfel încît să avem $\|1/2\,(f_{n_k} + f)\| \leqslant \alpha$. Din teorema lui Hahn-Banach, se poate construi o funcțională liniară și continuă f^*, astfel încît $f^*(f) = 1$ și $\|f^*\| = 1$. Din convergența slabă urmează: $1 > \alpha \geqslant \geqslant \|1/2\,(f_{n_k} + f)\| \geqslant 1/2\,|f^*(f_{n_k} + f)| \to 1$, contradicție.

31. Datorită unicității dezvoltării după o bază Schauder, f_n rezultă liniare. Apoi: $|f_n(x)| = |\alpha_n| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k \right\| \leqslant 2 \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|$. Conform principiului mărginirii uniforme, există C încît $|f_n(x)| \leqslant 2C\|x\|$, ceea ce arată că $\{f_n\}$ este o mulțime mărginită. Fie K un compact din X. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ și $x \in K$, există $n(\varepsilon, x)$ încît, pentru $n \geqslant n(\varepsilon, x)$, să avem: $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k \right\| < \varepsilon/3$.

Dacă $\|x - x'\| < \varepsilon/4C$, avem: $\left\| x' - \sum_{k=1}^{n} f_k(x') x_k \right\| \leqslant \|x' - x\| + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k \right\| +$

$+ \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k - \sum_{k=1}^{n} f_k(x') x_k \right\| \leqslant \varepsilon/4c + \varepsilon/3 + 2c\,\varepsilon/4c < \varepsilon.$

Să considerăm o subacoperire finită pentru K, formată din sfere $S(x, \varepsilon/4c)$. Dacă $x_1, \ldots, x_p$ sînt centrele acestor sfere, iar $n(\varepsilon) = \max_{1 \leqslant i \leqslant P} n(\varepsilon, x_i)$, atunci, pentru orice $n \geqslant n(\varepsilon)$ și $x \in K$, avem $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k \right\| < \varepsilon$.

32. Per Enflo [11] a dat un exemplu de spațiu Banach separabil, fără proprietatea de aproximare, adică în care aplicația identică nu este limită uniformă pe compacte de operatori de rang finit. În [9] se simplifică demonstrația lui Enflo, prin utilizarea unor inegalități probabiliste.

Deoarece orice spațiu cu bază Schauder are proprietatea de aproximare, rezultă că s-a dat un exemplu de spațiu Banach separabil, fără bază Schauder.

33. a) Dacă $P = 0$, evident, $p(P) = 0$. Dacă $p(P) = 0$, urmează $|a_0| + \ldots + |a_n| = 0$ deci $a_0 = \ldots = a_n = 0$, adică $P = 0$. Apoi: $\lambda P(X) = \lambda a_0 + (\lambda a_1)X + \ldots + (\lambda a_n)X^n$, deci $p(\lambda P) = |\lambda|\,p(P)$. Dacă $Q(X) = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$ atunci $(P + Q)(X) = (a_0 + b_0) + \ldots + (a_p + b_p)X^p$ unde $p = \max\{m, n\}$. Deci $p(P+Q) = |a_0 + b_0| + \ldots + |a_p + b_p| \leqslant p(P) + p(Q)$, deci p este o normă. În sfîrșit, avem: $(PQ)(X) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + \ldots + a_n b_m X^{m+n}$, deci $p(PQ) = \sum_{k=0}^{n+m} \left| \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right| \leqslant \sum_{i,j=0}^{n,m} |a_i b_j| = p(P)p(Q)$. b) Avem $P'(X) = a_1 + 2a_2 X + \ldots + n a_n X^{n-1}$ și deci $(P + Q)'(X) = (a_1 + b_1 + \ldots + p(a_p + b_p)X^{p-1} = P'(X) + Q'(X)$ și $(\lambda P)'(X) = (\lambda a_1) + 2(\lambda a_2)X + \ldots + n(\lambda a_n)X^{n-1} = \lambda P'(X)$, ceea ce arată că aplicația considerată este liniară. Notînd $P_n(X) = n^{-1}X^n$, avem $p(P_n) = n^{-1}$, deci $P_n \to 0$ în norma considerată. Deoarece $p(P_n') = 1$, urmează că P_n' nu converge la 0, deci aplicația considerată nu este continuă. c) Fiecare element din E poate fi identificat cu funcția polinom corespunzătoare pe $[-1, 1]$. p_1 este deci restricția normei uzuale pe $\mathcal{C}([-1, 1])$. Avem: $p_1(P) = \sup_{x \in [-1,1]} |a_0 + a_1\,dx + \ldots + a_n x^n| \leqslant |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| = p(P)$. Să mai arătăm că nu poate exista $C \geqslant 0$ astfel încît $p(P) \leqslant C p_1(P)$, $\forall P \in E$. Fie $P_n(X) = (n + 1)^{-1}(1 - X^2 + X^4 - \ldots + (-1)^n X^{2n})$ deci $p(P_n) = 1$. Scriind $P_n(x) = (n+1)^{-1}(1 + x^2)^{-1}(1 + (-1)^n x^{2n+2})$, se constată ușor că $p_1(P_n) = (n+1)^{-1}$, ceea ce ar implica $C \geqslant n + 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, contradicție.

34. a) Să notăm $\mu_n = (\|x_n\|)^{-1/2}$ dacă $x_n \neq 0$ și $\mu_n = n$ dacă $x_n = 0$. Evident, $\mu_n \to +\infty$ iar $\|\mu_n x_n\| = (\|x_n\|)^{1/2} \to 0$, deci $\mu_n x_n \to 0$. b) Dacă f este continuă, $\|f(x_n)\| \to 0$, deci mulțimea considerată este mărginită. Reciproc, dacă am presupune că f nu este continuă în 0, ar exista un șir $\{y_n\}$ încît $y_n \to 0$ și $\{f(y_n)\}$ nu este convergent la 0. Deci există ε_0 astfel încît pentru fiecare $k \in \mathbf{N}$ există $n_k \geqslant k$ încît $\|f(y_{n_k})\| \geqslant \varepsilon_0$. Subșirul $\{y_{n_k}\}$ este convergent la 0. Deci există $\mu_k \to +\infty$ încît $\mu_k y_{n_k} \to 0$. Fie $x_k = \mu_k y_{n_k}$. Avem $\|f(x_k)\| \geqslant \varepsilon_0 \mu_k$, deci $\{\|f(x_k)\|\}$ ar rezulta nemărginită, deși $x_k \to 0$.

35. Vom demonstra prin inducție că $f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f = (n+1)g^n$. Dacă $n = 0$, este chiar ipoteza. Dacă această relație are loc, deducem: $f \circ g^{n+2} - g^{n+1} \circ f \circ g = (n+1)g^{n+1}$. Înlocuind $f \circ g = 1_X + g \circ f$, găsim: $f \circ g^{n+2} - g^{n+2} \circ f = (n+2)g^{n+1}$, ceea ce demonstrează relația propusă. De aici: $(n+1)\|g^n\| \leqslant \|f\|\|g\|\|g^n\| + \|g^n\|\|g\|\|f\|$ sau: $(n+1)\|g^n\| \leqslant 2\|f\|\|g\|\|g^n\|$. Dar $g^n \neq 0$; în adevăr, dacă $g^n = 0$, din relația de mai sus ar urma $g^{n-1} = 0$ și, prin recurență, $g = 0$, de unde $1_X = 0$, contradicție. Deci relația găsită implică $n + 1 \leqslant 2\|f\|\|g\|$, contradicție. Dacă X este finit dimensional, prin fixarea unei baze, f, g pot fi identificate cu matricele (a_{ij}), (b_{ij}). Dacă notăm $h = f \circ g - g \circ f$ și (c_{ij}) matricea corespunzătoare lui h, atunci: $\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}\right) = 0$, ceea ce arată că $h \neq I$.

36. Incluziunea canonică este, evident, liniară. Continuitatea rezultă din $\|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} = \|(x_n)\|_p$. Notînd $i: l^p \to m$ aplicația considerată, din cele de mai sus rezultă $\|i\| \leqslant 1$. Deoarece $e_1 \in l^p \cap m$ și $\|e_1\|_\infty = \|e_1\|_p = 1$, deducem $\|i\| = 1$. Să arătăm că $\overline{l^1} = c_0$ în m. Dacă $x = (x_n) \in l^1$, avem $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$, ceea ce implică $x_n \to 0$, deci $l^1 \subseteq c_0$. Deoarece c_0 este închis în m, avem $\overline{l^1} \subseteq c_0$. Invers, fie $x = (x_n) \in c_0$. Notînd $x^{(n)} = (x_m^{(n)})$ șirul definit prin: $x_m^{(n)} = x_m$ dacă $m \leqslant n$ și $x_m^{(n)} = 0$ dacă $m > n$, avem $x^{(n)} \in l^1$ iar: $\|x - x^{(n)}\|_\infty = \sup_m |x_m - x_m^{(n)}| = \sup_{m \geqslant n} |x_m|$, ceea ce arată că $x^{(n)} \to 0$ în m. Deoarece $l^1 \subseteq l^p \subseteq c_0$, rezultă că $\overline{l^p} = c_0 (1 \leqslant p < +\infty)$. În sfîrșit, avem $l^p \neq c_0$, căci $x = (1, 2^{-1/p}, \ldots, n^{-1/p}, \ldots)$ este în c_0 dar nu în l^p.

37. R. C. James a construit [15] un spațiu Banach separabil B, care nu este reflexiv (mai precis, B este izometric prin izomorfismul natural cu un subspațiu liniar maximal închis în B^{**}), deși există o izometrie liniară (desigur, alta decît izomorfismul natural) care stabilește un izomorfism între B și B^{**}. B are ca elemente șirurile de numere reale convergente la 0, pentru care:

$$\|x\| = \sup\left[\sum_{i=1}^{n} (x_{p_i} - x_{p_{i+1}})^2 + (x_{p_{n+1}} - x_{p_1})^2\right]^{1/2} < \infty$$

unde sup este luat pe toate șirurile finite, crescătoare de numere naturale $(p_1, \ldots, p_n, p_{n+1})$.

38. a) Fie $\pi_i: X \to X/\mathrm{Ker}\, p_i = X_i$ surjecția canonică. Deci aplicația $\varphi: X \to \prod_{i \in I} X_i$ este definită prin $\varphi(x) = (\pi_i(x))$. De aici rezultă că φ este continuă. X_i fiind spații normate, $\prod_{i \in I} X_i$ este separat. Dacă φ este injectivă, X este în mod necesar separat. Reciproc, să presupunem X separat. Pentru

$x \in X$, $x \neq 0$, există $i_0 \in I$ astfel încît $p_{i_0}(x) \neq 0$, adică $\pi_{i_0}(x) \neq 0$, ceea ce arată că $\varphi(x) \neq 0$, deci φ este injectivă. b) Fie $\widetilde{X}_i$ completatul spațiului normat X_i, iar $\varepsilon_i : X_i \to \widetilde{X}_i$ incluziunea canonică. X fiind separat, $\varphi : X \to \prod_{i \in I} X_i$ este injectivă. De asemenea, $\varepsilon : \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} \widetilde{X}_i$, definită prin $\varepsilon((x_i)) = (\varepsilon_i(x_i))$, este injectivă. Deci $\varepsilon \circ \varphi : X \to \prod_{i \in I} \widetilde{X}_i$ este o aplicație liniară, continuă și injectivă. În particular, X este izomorf cu un subspațiu din $\prod_{i \in I} \widetilde{X}_i$. Să mai arătăm că $\varepsilon \circ \varphi$ stabilește un izomorfism topologic. Deoarece fiecare ε_i este un homeomorfism între X_i și imaginea sa în $\widetilde{X}_i$, mai rămîne de arătat că φ este homeomorfism între X și $\varphi(X) \subseteq \prod_{i \in I} X_i$. Fie $U \subseteq X$ mulțime deschisă: U se scrie deci ca o reuniune arbitrară de mulțimi de forma $V(x, i_1, \ldots i_n; \varepsilon)$. Deoarece $\varphi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \varphi(A_i)$, este suficient să arătăm că $\varphi(V(x, i_1, \ldots, i_n; \varepsilon))$ este deschisă în $\varphi(X)$. Deoarece φ este liniară, putem presupune $x = 0$. Fie $V = \prod_{i \in I} V_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ submulțimea definită astfel: $V_i = \{z \in X_i \mid \|z\| < \varepsilon\}$ dacă $i \in \{i_1 \ldots, i_n\}$ și $V_i = X_i$ în rest. Atunci $z \in \varphi(V(i_1, \ldots, i_n; \varepsilon)) \Leftrightarrow \exists x \in V(i_1, \ldots, i_n; \varepsilon)$ încît $z = \varphi(x) \Leftrightarrow \exists x \in X$ încît $p_{i_k}(x) < \varepsilon$, $k = 1, \ldots, n$ și $z = \varphi(x) \Leftrightarrow z \in \varphi(X)$ și $\|z_i\| < \varepsilon, \forall i \in \{i_1, \ldots, i_n\}$, unde $z = (z_i)$. Aceste echivalențe arată că $\varphi(V(i_1, \ldots, i_n; \varepsilon)) = \varphi(X) \cap V$, ceea ce încheie demonstrația.

39. $f_n \to f$ în $\mathcal{C}([a, b])$ dacă și numai dacă $\|f_n - f\| \to 0$, deci dacă și numai dacă: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ astfel încît $\forall n \geqslant n_\varepsilon$, avem: $\|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$. Ținînd seama de definiția normei: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ astfel încît $\forall n \geqslant n_\varepsilon$, avem: $\sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. Deci: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ astfel încît, $\forall n \geqslant n_\varepsilon$, avem: $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$, care este exact definiția convergenței uniforme pe $[a, b]$.

40. Afirmația rezultă din următoarele inegalități: $\|x^k - x\| = \sup |x_n^k - x_n| \geqslant |x_n^k - x_n|$ în c_0, c și m; și $\|x^k - x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n|^p\right)^{1/p} \geqslant |x_n^k - x_n|$ în l^p cu $p \geqslant 1$.

41. Ținînd seama de unicitatea completatului, este suficient să observăm că $L^p([0,1])$ este spațiu Banach, iar X_p se identifică cu un subspațiu dens în $L^p([0,1])$ (conform [18]).

42. Afirmația este o consecință a inegalității $|\|x\| - \|x'\|| \leqslant \|x - x'\|$.

43. Dacă $(x_n), (y_n) \in c_{00}$ iar $n_0 \in \mathbf{N}$ este astfel încît $x_n = y_n = 0$, $\forall n \geqslant n_0$, atunci $\lambda x_n + \mu y_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}_0$, ceea ce arată că $\lambda(x_n) + \mu(y_n) \in c_{00}$, deci c_{00} este subspațiu liniar în c_0. Fie $(x_n) \in c_0$ oarecare și $\varepsilon > 0$. Deoarece $x_n \to 0$, există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $|x_n| < \varepsilon$, $\forall n \geqslant n_0$. Să notăm $y_n = x_n$ dacă $n < n_0$ și $y_n = 0$ dacă $n \geqslant n_0$. Din definiție avem $(y_n) \in c_{00}$ iar $\|(x_n) - (y_n)\| = \sup_{n \geqslant n_0} |x_n| \leqslant \varepsilon$, ceea ce arată că c_{00} este dens în c_0.

44. T este bine definit, deoarece din construcția spațiului $\mathcal{C}^1([0,1])$, f' este continuă pe $[0,1]$. Apoi: $T(f + g) = ((f + g)', (f + g)(0)) = (f' + g', f(0) + g(0)) = Tf + Tg$ și $T(\lambda f) = ((\lambda f)', (\lambda f)(0)) = (\lambda f', \lambda f(0)) = \lambda Tf$, ceea ce arată că T este liniar. Apoi: $\|Tf\| = \|(f', f(0))\| = \|f'\| + |f(0)| =$

$= \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + |f(0)| = \|f\|$, ceea ce arată că T este izometric, în particular continuu și injectiv. Mai rămîne să arătăm surjectivitatea lui T. Fie $(g, \lambda) \in \in \mathcal{C}([0,1])\oplus\mathbf{R}$ și să definim $f(t)=\int_0^t g(x)dx+\lambda$. După cum se știe, $\frac{d}{dt} f(t) = g(t)$ iar $f(0) = \lambda$, ceea ce arată că $T(f) = (g, \lambda)$. În sfîrșit, $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|')$ este spațiu Banach, deoarece $\mathcal{C}([0,1]) \oplus \mathbf{R}$ este spațiu Banach.

45. T este bine definit. În adevăr, dacă notăm $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, avem $|y_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |y_n - y_{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, deci $T((x_n)) \in bv$. Apoi: $T((x_n) + (x_n')) = T((x_n+x_n')) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+x_k')\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k'\right) = T((x_n)) + T((x_n'))$ și $T(\lambda(x_n)) = T((\lambda x_n)) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k\right) = \lambda T((x_n))$, de unde urmează liniaritatea lui T. Avem: $\|T((x_n))\| = \left\|\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|(x_n)\|$, ceea ce arată că T este izometric, în particular injectiv și continuu. Mai rămîne să arătăm surjectivitatea lui T. Fie deci $(y_n)\in bv$ și să notăm: $x_1 = y_1$, $x_n = y_n - y_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$. Avem, evident, $(x_n)\in l^1$ iar $T((x_n)) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \left(y_1 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k-1})\right) = (y_n)$, ceea cea arată că T este surjectiv. Această ultimă parte arată că inversa lui T este dată prin $S((y_n)) = (y_1, y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1}, \ldots)$.

46. Fie $\tilde{x}\in\tilde{X}$ și $(x_n)\in\tilde{x}$. (x_n) este deci șir Cauchy în X. f fiind continuă, $(f(x_n))$ este șir Cauchy în Y. Fie $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Dacă $(x_n') \in \tilde{x}$ iar $y' = \lim_{n\to\infty} f(x_n')$ atunci, introducînd șirul (z_n), definit prin $z_{2n} = x_n$ și $z_{2n+1} = x_n'$, avem încă $(z_n)\in\tilde{x}$, ceea ce implică $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = y'$. Deci, prin $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ avem o aplicație bine definită. Dacă $x\in X$, rezultă imediat $\tilde{f}(i(x)) = f(x)$, considerînd ca reprezentant pentru $i(x)$ șirul constant. $\tilde{f}$ este în mod evident liniară. Apoi: $\|\tilde{f}(\tilde{x})\| = \|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(x_n)\| \leqslant M \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant M\|\tilde{x}\|$, ceea ce arată continuitatea lui $\tilde{f}$. Unicitatea este consecință a faptului că $i(X)$ este dens în $\tilde{X}$.

47. *a*) Dacă X este spațiu Hilbert, din $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ urmează $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, ceea ce implică x, y liniar dependenți. Orice două funcții pozitive f, $g\in\mathcal{C}([a, b])$, care își ating maximul în același punct, satisfac $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$. Orice două (clase de) funcții pozitive f, $g\in L^1([a, b])$ satisfac $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$. Este clar că se pot alege funcții liniar independente care satisfac condițiile precedente.

b) $1 \Rightarrow 2$ Fie $\|\cdot\|_1$ o normă echivalentă, încît $(X, \|\cdot\|_1)$ să fie strict normat. Este suficient să alegem $Y = (X, \|\cdot\|_1)$ și $T = 1_X$. $2 \Rightarrow 1$ Definim pe X norma $\|x\|_1 = \|x\| + \|Tx\|$. Este evident că este o normă; în plus, $\|x\| \leqslant$

$\leqslant \| x \|_1 \leqslant (1 + \| T \|) \| x \|$ arată că cele două norme sînt echivalente. Să arătăm că $(X, \| \cdot \|_1)$ este strict normat. Fie $x, y \in X$ elemente liniar independente. T fiind injectiv, $Tx, Ty \in Y$ sînt liniar independente. Y fiind strict normat, avem $\| Tx + Ty \| < \| Tx \| + \| Ty \|$, de unde: $\| x + y \|_1 \leqslant \| x + y \| + \| T(x + y) \| \leqslant \| x \| + \| y \| + \| Tx + Ty \| < \| x \| + \| y \| + \| Tx \| + \| Ty \| = \| x \|_1 + \| y \|_1$.

48. Fie $(x_n) \in m$ definit prin $x_{2n} = 0$, $x_{2n+1} = 1$, iar $(y_n) \in m$ definit prin $y_{2n} = 1$, $y_{2n+1} = 0$. Deoarece $x_n y_n = 0$, din d) rezultă LIM $x_n y_n = 0$. Din c) urmează LIM x_n = LIM y_n deci, dacă ar avea loc LIM $x_n y_n$ = LIM x_n LIM y_n, ar urma LIM x_n = LIM $y_n = 0$. Însă $x_n + y_n = 1$, deci din aditivitate s-ar ajunge la relația contradictorie: $1 = \text{LIM}\,(x_n + y_n) = \text{LIM}\, x_n + \text{LIM}\, y_n = 0$.

49. Dacă f este continuă, există $\delta > 0$ astfel încît $\| f(x, y) \| \leqslant 1$ de îndată ce $\| x \| < \delta$ și $\| y \| < \delta$. Fie $x \neq 0$ și $y \neq 0$. Deoarece $\left\| \frac{\delta}{2 \| x \|} x \right\| < \delta$ și $\left\| \frac{\delta}{2 \| y \|} y \right\| < \delta$, urmează că $\| f(x, y) \| \leqslant \frac{4}{\delta^2} \| x \| \, \| y \|$ deci putem lua $M = \frac{4}{\delta^2}$, inegalitatea rămînînd evident valabilă pentru $x = 0$ sau $y = 0$. Reciproc, dacă există M astfel încît $\| f(x, y) \| \leqslant M \| x \| \, \| y \|$ atunci putem scrie: $\| f(x, y) - f(x_0, y_0) \| \leqslant \| f(x, y) - f(x, y_0) \| + \| f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \| = \| f(x, y - y_0) \| + \| f(x - x_0, y_0) \| \leqslant M \| x \| \, \| y - y_0 \| + M \| x - x_0 \| \, \| y_0 \| \leqslant M \| x_0 \| \, \| y - y_0 \| + M \| x - x_0 \| \, \| y_0 \| + M \| x - x_0 \| \, \| y - y_0 \|$. Deci, alegînd $\delta = \min \{1, \varepsilon / 3M \| x_0 \|, \varepsilon / 3M \| y_0 \|\}$, din $\| x - x_0 \| < \delta$ și $\| y - y_0 \| < \delta$ urmează $\| f(x, y) - f(x_0, y_0) \| < \varepsilon$.

50. Fie $\{x_n\}$ o mulțime densă în X. Pentru fiecare $(n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ pentru care există $x \in X_1$ încît $\| x - x_n \| < m^{-1}$, notăm $x_{mn} \in X_1$ un element cu proprietatea $\| x_{mn} - x_n \| < m^{-1}$. Vom arăta că mulțimea $\{x_{mn}\}$ astfel definită este densă în X_1. Fie $x \in X_1$ și $\varepsilon > 0$. Există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $m^{-1} < 1/2\, \varepsilon$. Apoi există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $\| x - x_n \| < m^{-1}$. Deci există $x_{mn} \in X_1$ astfel încît $\| x_{mn} - x_n \| < m^{-1}$. Atunci $\| x - x_{mn} \| \leqslant \| x - x_n \| + \| x_n - x_{mn} \| < m^{-1} + m^{-1} < \varepsilon$.

51. Fie $x \in X$ și să presupunem că $x_1, x_2 \in X_1$ sînt elemente de cea mai bună aproximare pentru x. Notînd $d = d(x, X_1)$, avem deci $d = \| x - x_1 \| = \| x - x_2 \|$. Dar: $2d \leqslant 2 \| x - 1/2\, (x_1 + x_2) \| = \| (x - x_1) + (x - x_2) \| \leqslant \| x - x_1 \| + \| x - x_2 \| = 2d$. Din faptul că X este strict convex, urmează că $(x - x_1)$ și $(x - x_2)$ sînt liniar dependenți. Există deci $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$, cu $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$, încît $\lambda_1 (x - x_1) + \lambda_2 (x - x_2) = 0$, de unde $(\lambda_1 + \lambda_2) x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X_1$. Deci $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, adică $x_1 = x_2$.

52. Fie X_1 de dimensiune algebrică finită, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază algebrică în X_1. Cu teorema lui Hahn-Banach, funcționalele liniare și continue $e_i^* \in X_1^* (i = 1, \ldots, n)$ se prelungesc la funcționale liniare continue $f_i \in X^* (i = 1, \ldots, n)$. Fie $F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$. Deoarece $F : X \to X_1$ este liniară și continuă, rezultă că, punînd $X_2 = \operatorname{Ker} F$, se obține o sumă directă topologică $X = X_1 \oplus X_2$. Fie acum X_1 închis și de codimensiune finită. În acest caz, X/X_1 este finit dimensional și separat, deci este izomorf cu orice complement algebric X_2 al lui X_1. Rezultă că $X = X_1 \oplus X_2$ este sumă directă topologică.

53. Deoarece X/X_1 este de dimensiune finită, $X_2/X_1 \subseteq X/X_1$ rezultă tot de dimensiune finită. În particular, X_2/X_1 este închis în X/X_1. Deci, notînd $\pi_1 : X \to X/X_1$ proiecția canonică, înseamnă că $X_2 = \pi_1^{-1}(X_2/X_1)$ este închis în X.

VI. SPAȚII NORMATE DE APLICAȚII LINIARE CONTINUE

1. a) Definim $\varphi : X \to L(\Gamma, X)$ astfel: pentru fiecare $x \in X$, $\varphi(x)$ este aplicația definită pe Γ cu valori în X, prin $\varphi(x)(\lambda) = \lambda x$. Avem: $\varphi(x)(\alpha\lambda + \beta\mu) = (\alpha\lambda + \beta\mu)x = \alpha(\lambda x) + \beta(\mu x) = \alpha\varphi(x)(\lambda) + \beta\varphi(x)(\mu)$, deci $\varphi(x)$ este liniară. Apoi: $\|\varphi(x)(\lambda)\| = \|\lambda x\| = \|x\| \cdot |\lambda|$, ceea ce arată că $\varphi(x)$ este continuă și $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. Deci φ este corect definită și este izometrică. Avem: $\varphi(\alpha x + \beta y)(\lambda) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \alpha\varphi(x)(\lambda) + \beta\varphi(y)(\lambda)$, $\forall \lambda \in \Gamma$, adică $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$, deci φ este liniară. Mai avem de arătat că φ este surjectivă. Fie $f \in L(\Gamma, X)$ și să notăm $x = f(1)$. Pentru fiecare $\lambda \in \Gamma$ avem $f(\lambda) = f(\lambda 1) = \lambda f(1) = \lambda x = \varphi(x)(\lambda)$, ceea ce arată că $\varphi(x) = f$.

b) Necesitatea condiției este evidentă. Dacă presupunem că $L(Y, X)$ este spațiu Banach, pentru orice spațiu Banach Y, în particular $L(\Gamma, X)$ rezultă spațiu Banach. Cu punctul precedent, X rezultă spațiu Banach.

2. a) Avem: $T(\lambda(x_n) + \mu(y_n)) = T((\lambda x_n + \mu y_n)) = (\lambda x_2 + \mu y_2, \ldots) = \lambda(x_2, \ldots) + \mu(y_2, \ldots) = \lambda T((x_n)) + \mu T((y_n))$, deci T este liniar. Apoi: $\|T((x_n))\| = \|(x_2, \ldots)\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|(x_n)\|$, ceea ce arată că T este continuu și $\|T\| \leqslant 1$. Dar $\|e_2\| = 1$ și $\|Te_2\| = 1$, ceea ce arată că $\|T\| = 1$. Fie $(y_n) \in l^2$. Notînd $x_1 = 0$ și $x_n = y_{n-1}$, $\forall n \geqslant 2$, avem, evident, $(x_n) \in l^2$ și $T((x_n)) = (y_n)$, deci T este surjectiv. În sfîrșit, T nu este injectiv, căci $Te_1 = 0$.

b) Avem: $S(\lambda(x_n) + \mu(y_n)) = S((\lambda x_n + \mu y_n)) = (0, \lambda x_1 + \mu y_1, \ldots) = \lambda(0, x_1, \ldots) + \mu(0, y_1, \ldots) = \lambda S((x_n)) + \mu S((y_n))$, deci S este liniar. Apoi: $\|S((x_n))\| = \|(0, x_1, \ldots)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|(x_n)\|$, de unde S rezultă continuu și $\|S\| = 1$. Dacă $S((x_n)) = 0$, urmează $(0, x_1, \ldots) = 0$, deci $(x_n) = 0$, ceea ce arată că S este injectiv. Pentru a demonstra ultima afirmație, să definim $f : l^2 \to \Gamma$ prin $f((x_n)) = x_1$. f este, evident, liniară și continuă. Deoarece $f(S((x_n))) = 0$, rezultă că: $S(l^2) \subseteq \operatorname{Ker} f$. Reciproc, dacă $(x_n) \in \operatorname{Ker} f$, urmează $x_1 = 0$. Notînd $y_n = x_{n+1}$, avem $(y_n) \in l^2$ și $S((y_n)) = (x_n)$, ceea ce arată că $S(l^2) = \operatorname{Ker} f$ este subspațiu liniar maximal închis.

3. Folosind inegalitatea lui Hölder, avem: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |x_n|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\right) = \frac{\pi^2}{6} \|(x_n)\|^2$, ceea ce arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |x_n|$ este absolut convergentă, deci f este bine definită. Apoi: $f(\lambda(x_n) + \mu(y_n)) = f((\lambda x_n + \mu y_n)) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} y_n = \lambda f((x_n)) + \mu f((y_n))$, de unde rezultă că f este liniară. Deoarece $|f((x_n))| = |\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |x_n| \leqslant \pi/\sqrt{6}\, \|(x_n)\|$, urmează că f este continuă și $\|f\| \leqslant \pi/\sqrt{6}$. În sfîrșit, fie $x_n = n^{-1}$ și $x = (x_n)$. Avem $x \in l^2$, $\|x\| = \pi/\sqrt{6}$ iar $f(x) = \pi^2/6$, de unde $\|f\| \geqslant |f(x)|\, \|x\|^{-1} = \pi/\sqrt{6}$, ceea ce încheie demonstrația.

4. a) Deoarece $\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \lim_{n\to\infty} y_n$, rezultă că f este liniară. Apoi: $|f((x_n))| = |\lim_{n\to\infty} x_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| = \|(x_n)\|$, ceea ce arată că f este continuă și $\|f\| \leqslant 1$. Luînd $x_n = 1$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, avem $(x_n) \in c$, $\|(x_n)\| = 1$ și $f((x_n)) = 1$, de unde $\|f\| = 1$. Deoarece $c_0 = \operatorname{Ker} f$, ultima afirmație este o consecință a celor de mai sus.

b) T este bine definit, căci $(x_n - \lim_{n\to\infty} x_n)$ este un șir convergent la 0. Liniaritatea lui T se deduce cu ușurință din cea a lui f. Apoi: $\|T((x_n))\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n - f((x_n))| + |f((x_n))| \leqslant 3\, \|(x_n)\|$, ceea ce arată că T este continuu și $\|T\| \leqslant 3$. Alegînd $x_1 = -1$ și $x_n = 1$, $\forall n \geqslant 2$, avem $x \in c$, $f(x) = 1$, deci $\|Tx\| = 3$, de unde $\|T\| = 3$. Să definim $S : c_0 \oplus \Gamma \to c$, prin $S((x_n), \lambda) = (x_n + \lambda)$. Avem: $T[S((x_n), \lambda)] = T((x_n + \lambda)) = ((x_n), \lambda)$ și $S[T((x_n))] = S[(x_n - f((x_n)), f((x_n))] = (x_n)$, deci $S = T^{-1}$ și T rezultă bijectiv. Rămîne să arătăm că T^{-1} este continuu și să calculăm $\|T^{-1}\|$. Avem: $|S((x_n)\ \lambda)| = |(x_n + \lambda)| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n + \lambda| \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| + |\lambda| = \|(x_n)\| + |\lambda| = \|((x_n), \lambda)\|$, ceea ce arată că S este continuu și $\|S\| \leqslant 1$. Luînd $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\lambda = 1$, avem: $\|S((x_n), \lambda)\| = 1$, ceea ce arată că $\|T^{-1}\| = 1$.

5. Avem $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right|^2 \leqslant \sup |x_n| \frac{\pi^2}{6}$, ceea ce arată că $T((x_n)) \in l^2$, deci T este bine definit. Avem: $T(\lambda(x_n) + \mu(y_n)) = T((\lambda x_n + \mu y_n)) = \left(\frac{(\lambda x_n + \mu y_n}{n}\right) =$ $= \lambda T(x_n) + \mu T(y_n)$, deci T este liniar. Folosind inegalitatea de mai sus, găsim: $\|T((x_n))\| = \left\|\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{n}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|(x_n)\|$, deci T este continuu și $\|T\| \leqslant$ $\leqslant \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Dacă $e = (1, ..., 1, ...)$, avem $e \in m$, $\|e\| = 1$ și $\|Te\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, ceea ce arată că $\|T\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. T este injectiv: dacă $T((x_n)) = 0$, atunci urmează $\left(\frac{x_n}{n}\right) = 0$, adică $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. T nu este surjectiv: considerînd $y_n = n^{-1}$ dacă n nu este pătrat perfect și $y_n = k^{-1}$ dacă $n = k^2$, se constată fără dificultate că $(y_n) \in l^2$. Însă (ny_n) nu este un șir mărginit, deoarece conține subșirul $ky_{k^2} = k^2 \cdot k^{-1} = k$.

6. a) Faptul că T este liniar a fost verificat la exercițiul I. 9. Apoi: $\|T(x_1, x_2)\| = \|T_1(x_1) + T_2(x_2)\| \leqslant \|T_1\|\, \|x_1\| + \|T_2\|\, \|x_2\| \leqslant \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}\, (\|x_1\| + \|x_2\|) = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}\, \|(x_1, x_2)\|$, deci T este continuu

și $\|T\| \leqslant \max \{\|T_1\|, \|T_2\|\}$. Însă $\|T\| \geqslant \sup_{\|x_1\|\leqslant 1} \|T(x_1, 0)\| = \sup_{\|x_1\|\leqslant 1} \|T_1 x_1\| =$ $= \|T_1\|$ și $\|T\| \geqslant \sup_{\|x_2\|\leqslant 1} \|T(0, x_2)\| = \sup_{\|x_2\|\leqslant 1} \|T_2 x_2\| = \|T_2\|$, de unde $\|T\| =$ $= \max \{\|T_1\|, \|T_2\|\}$.

b) Liniaritatea lui T_1 și T_2 a fost arătată la exercițiul I.9. Apoi: $\|T_1 x_1\| =$ $= \|T(x_1, 0)\| \leqslant \|T\| \|x_1\|$ și $\|T_2 x_2\| = \|T(0, x_2)\| \leqslant \|T\| \|x_2\|$, ceea ce demonstrează continuitatea aplicațiilor T_1 și T_2.

c) Conform celor de mai sus, φ și ψ sînt bine definite. Fiind restricții ale aplicațiilor considerate la exercițiul I. 9, rezultă că sînt liniare și inverse una alteia. În sfîrșit, deoarece $\|\varphi(T_1, T_2)\| = \|T\| = \max \{\|T_1\|, \|T_2\|\} \leqslant$ $\leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$ și $\|\psi(T)\| = \|(T_1, T_2)\| = \|T_1\| + \|T_2\| \leqslant 2\|T\|$, urmează că φ și ψ sînt continue.

7. Fie $y \in \overline{T(X)}$, deci există $y_n \in T(X)$ astfel încît $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Fie $x_n \in X$ astfel încît $y_n = Tx_n$. Deoarece $\|x_n - x_m\| \leqslant m^{-1}\|T(x_n - x_m)\| = m^{-1}\|y_n -$ $- y_m\|$ iar $\{y_n\}$ este șir convergent, deducem că $\{x_n\}$ este șir Cauchy. Fie $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Deoarece T este continuu, $Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, adică $y \in T(X)$.

8. După cum se știe, $x \to \int_0^x f(t)\,dt$ este o funcție derivabilă și are ca derivată pe f, dacă f este continuă. Deci T este bine definit. Pentru fiecare $x \in [0, 1]$ avem: $T(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_0^x f(t)\,dt +$ $+ \mu \int_0^x g(t)\,dt = \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x)$, deci T este liniar. Deoarece: $\|Tf\|_1 =$ $= \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| dx \leqslant \int_0^1 \int_0^x |f(t)|\,dt\,dx \leqslant \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|\,dt\,dx = \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1 \leqslant$ $\leqslant \|f\| \leqslant \|f\|'$, rezultă că $T: \mathcal{C}^1([0, 1]) \to (\mathcal{C}^1([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ este continuu, indiferent de norma de pe primul spațiu. Apoi: $\|Tf\| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leqslant$ $\leqslant \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1 \leqslant \|f\| \leqslant \|f\|'$, deci $T: \mathcal{C}^1([0, 1]) \to$ $\to (\mathcal{C}^1([0, 1]), \|\cdot\|)$ este continuu, oricare ar fi norma de pe primul spațiu. Avem: $\|Tf\|' = |Tf(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\| \leqslant \|f\|'$; deci $T: \mathcal{C}^1([0,1]) \to (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|')$ este continuu, dacă pe primul spațiu se consideră norma $\|\cdot\|$ sau $\|\cdot\|'$. În sfîrșit, vom arăta că $T: (\mathcal{C}^1([0, 1]), \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|')$ nu este continuu. În adevăr, dacă T ar fi continuu ar exista M astfel încît $\|T(f)\|' \leqslant M\|f\|_1$, adică $\|f\| \leqslant M\|f\|_1$, în contradicție cu concluziile exercițiului V. 2.

9. Fie $x \in X = \overline{X}_1$ și $x_n \in X_1$ astfel încît $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Avem: $\|T_1 x_n - T_1 x_m\| =$ $= \|T_1(x_n - x_m)\| \leqslant \|T_1\| \|x_n - x_m\|$. $\{x_n\}$, fiind șir convergent, este șir Cauchy, deci $\{T_1 x_n\}$ este șir Cauchy în Y, deci există $\lim_{n\to\infty} T_1 x_n$. Să arătăm că această limită nu depinde de șirul $\{x_n\}$ ales. Fie $x'_n \in X_1$ astfel încît $x'_n \to x$ și să definim $y_{2n} = x_n$, $y_{2n+1} = x'_n$. Evident, $y_n \to x$, deci, ca mai sus, există $\lim_{n\to\infty} T_1 y_n$. Însă: $\lim_{n\to\infty} T_1 y_n = \lim_{n\to\infty} T_1 x_n = \lim_{n\to\infty} T_1 x'_n$. Deci, dacă definim $Tx =$ $= \lim_{n\to\infty} T_1 x_n$, obținem o aplicație bine definită $T: X \to Y$. Este evident că T este liniar și că $T|_{X_1} = T_1$. În sfîrșit, avem: $\|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_1 x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|T_1 x_n\| \leqslant$ $\leqslant \|T_1\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T_1\| \|x\|$, ceea ce arată că T este continuu și $\|T\| \leqslant$

$\leqslant \| T_1 \|$. Inegalitatea inversă este o consecință a faptului că T prelungește T_1. Unicitatea lui T rezultă din faptul că X_1 este dens în X.

10. a) Deoarece $-\|f\| \leqslant f(x) \leqslant \|f\|$, $\forall x \in K$, iar μ este pozitivă, avem: $\mu(-\|f\|) \leqslant \mu(f) \leqslant \mu(\|f\|)$, de unde $|\mu(f)| \leqslant \mu(1)\|f\|$, ceea ce demonstrează continuitatea lui μ. b) Deoarece μ este continuu, avem $\mu(\varphi) \leqslant |\mu(\varphi)| \leqslant \|\mu\| \cdot \|\varphi\| \leqslant \|\mu\| \|f\|$, ceea ce arată că μ_1 este bine definit, pentru orice $f \in \mathcal{C}(K)$ pozitivă. În plus, dacă $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in K$, rezultă că $\mu_1(f) \geqslant \mu(0) = 0$. Să definim, pentru $f \in \mathcal{C}(K)$ oarecare: $\mu_1(f) = \mu_1(f^+) - \mu_1(f^-)$. Arătăm că μ_1 este liniară. Dacă $\lambda \geqslant 0$, avem: $\mu_1(\lambda f) = \mu_1(\lambda f^+) - \mu_1(\lambda f^-) = \lambda[\mu_1(f^+) - \mu_1(f^-)] = \lambda\mu_1(f)$. Dacă $\lambda < 0$, avem: $\mu_1(\lambda f) = \mu_1((\lambda f)^+) - \mu_1((\lambda f)^-) = \mu_1((-\lambda)(-f)^-) - \mu_1((-\lambda)(-f^+)) = \lambda\mu_1(f)$. Fie $f, g \in \mathcal{C}(K)$ pozitive. Avem: $\mu_1(f) + \mu_1(g) = \sup_{|\varphi| \leqslant f} \mu(\varphi) + \sup_{|\psi| \leqslant g} \mu(\psi) = \sup_{\substack{|\varphi| \leqslant f \\ |\psi| \leqslant g}} \mu(\varphi + \psi) \leqslant \sup_{|\varphi| \leqslant f+g} \mu(\varphi) = \mu_1(f+g)$. Fie acum $\varepsilon > 0$ și să alegem $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}(K)$ astfel încît $|\varphi_\varepsilon| \leqslant f + g$, iar $\mu(\varphi_\varepsilon) + \varepsilon \geqslant \mu_1(f+g)$. Notăm $\varphi = \min\{|\varphi_\varepsilon|, f\}$ și $\psi = |\varphi_\varepsilon| - \varphi$ deci $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(K)$. În plus, avem $\mu_1(f+g) \leqslant \mu(\varphi_\varepsilon) + \varepsilon = \mu[\operatorname{sgn}(\varphi_\varepsilon)(\varphi + \psi)] + \varepsilon = \mu[\operatorname{sgn}(\varphi_\varepsilon)\varphi] + \mu[\operatorname{sgn}(\varphi_\varepsilon)\psi] + \varepsilon$. Deoarece funcțiile $\operatorname{sgn}(\varphi_\varepsilon)\varphi$ și $\operatorname{sgn}(\varphi_\varepsilon)\psi$ sînt continue, deducem $\mu(f+g) \leqslant \mu_1(f) + \mu_1(g)$. Cum ε a fost oarecare, urmează $\mu_1(f+g) = \mu_1(f) + \mu_1(g)$. Se arată acum cu ușurință că μ_1 rămîne aditivă pe $\mathcal{C}(K)$. Din definiție, μ_1 rezultă pozitivă. În sfîrșit, dacă f este pozitivă, din definiție $\mu_1(f) \geqslant \mu(f)$, ceea ce arată că, definind $\mu_2(f) = \mu_1(f) - \mu(f)$, obținem o funcțională liniară, pozitivă și astfel încît condiția din enunț să fie îndeplinită.

11. a) Deoarece orice $f \in \mathcal{K}(X)$ are un suport compact $K \subseteq X$, avem $f \in \mathcal{C}(K)$, deci $\mathcal{K}(X) = \bigcup_{K \subseteq X} \mathcal{C}(K)$. Dacă $K_1 \subseteq K_2$ atunci $\mathcal{C}(K_1) \subseteq \mathcal{C}(K_2)$ și pentru orice $f \in \mathcal{C}(K_1)$, avem $\sup_{x \in K_1} |f(x)| = \sup_{x \in K_2} |f(x)|$, ceea ce demonstrează continuitatea injecției canonice $\mathcal{C}(K_1) \to \mathcal{C}(K_2)$. b) Din exercițiul IV. 8, μ este continuă dacă și numai dacă $\mu | \mathcal{C}(K)$ este continuă, pentru fiecare $K \subseteq X$ compact. Conform exercițiului 10, $\mu | \mathcal{C}(K)$ este continuă dacă și numai dacă există μ_1, μ_2 funcționale liniare pozitive pe $\mathcal{C}(K)$, astfel încît $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Deoarece $\mu_1(f) = \sup_{|\varphi| \leqslant f} \mu(\varphi)$, se poate defini pentru orice $f \in \mathcal{K}^+(X)$, afirmația din enunț rezultă (pentru teoria măsurilor Radon, a se consulta [10].

12. Mulțimea $\{Tx \mid \|x\| \leqslant 1\}$ fiind relativ compactă în Y, iar norma fiind funcție continuă, rezultă că există M, astfel încît $\|Tx\| \leqslant M$, $\forall \|x\| \leqslant 1$. Urmează imediat că $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$, $\forall x \in X$, deci T este continuu.

13. Avem de arătat că mulțimea $A = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid \|f\|' \leqslant 1\}$ este relativ compactă în $\mathcal{C}([0,1])$. Însă orice $f \in A$ este funcție derivabilă, $|f(0)| \leqslant \|f\|' \leqslant 1$ și $|f'(x)| \leqslant \|f\|' \leqslant 1$, oricare ar fi $f \in A$, ceea ce arată că sînt îndeplinite condițiile din exercițiul V. 11.

14. 1_X este compact dacă și numai dacă $\{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ este mulțime relativ compactă, ceea ce este echivalent cu faptul că X este finit dimensional. Dacă $T \in L(X)$ este compact și există $T^{-1} \in L(X)$, atunci $1_X = TT^{-1}$ este compact; cu cele de mai sus, X rezultă finit dimensional.

15. a) $B_n(f)$ fiind polinom de grad cel mult n, deducem că B_n este bine definit și de rang finit. Faptul că B_n este liniar rezultă cu ușurință. În sfîrșit: $\| B_n f \| = \sup_{x \in [0,1]} | \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} | \leqslant \| f \| \sup_{x \in [0,1]} | x^n | = \| f \|$, de unde urmează continuitatea lui B_n. b) Pentru acest rezultat, a se vedea [18]. c) Să presupunem că $B_n \to B$ în $L(\mathcal{C}([0, 1]))$. Deoarece, pentru orice $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ cu $\| f \| \leqslant 1$, avem $\| B_n - B \| \geqslant \| B_n f - Bf \|$, urmează $B_n f \to Bf$ în $\mathcal{C}([0, 1])$. Cu cele de mai sus, $Bf = f$, $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$, $\| f \| \leqslant 1$. Deci $B = 1_{\mathcal{C}([0,1])}$. Pe de altă parte, B este operator compact, ca limită de operatori de rang finit. Deoarece $\mathcal{C}([0, 1])$ nu este de dimensiune finită, se ajunge la contradicție, ținînd seama de exercițiul 14.

16. Să notăm $B = \{x \in \operatorname{Ker} T \mid \| x \| \leqslant 1\}$. Oricare ar fi $x \in B$, avem $0 = Tx = x - Kx$ deci $Kx = x$, ceea ce arată că $K(B) = B$. Însă $B \subseteq X$ este mărginită, deci $K(B)$ este relativ compactă. Dar B este sfera unitate în spațiul normat $\operatorname{Ker} T$. Deci $\operatorname{Ker} T$ este de dimensiune finită.

17. a) Avem: $\| f(x) - f(x_0) \| = \| \mathrm{d}_{x_0} f(x - x_0) + \omega(x - x_0) \| x - x_0 \| \| \leqslant (\| \mathrm{d}_{x_0} f \| + \| \omega(x - x_0) \|) \| x - x_0 \|$. Fie $\varepsilon > 0$ și δ_0 astfel încît $\| \omega(x - x_0) \| \leqslant 1$, oricare ar fi $\| x - x_0 \| < \delta_0$. Alegînd $\delta = \min \{\varepsilon / 1 + \| \mathrm{d}_{x_0} f \|, \delta_0\}$, avem $\| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon$, de îndată ce $\| x - x_0 \| < \delta$, ceea ce arată continuitatea lui f în x_0. Să presupunem că $\mathrm{d}'_{x_0} f : X \to Y$ este o aplicație liniară continuă, iar $\omega' : X \to Y$ o funcție, astfel încît $f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}'_{x_0} f(x - x_0) + \omega'(x - x_0) \| x - x_0 \|$ și $\lim_{x \to 0} \omega'(x) = 0$. Deducem: $(\mathrm{d}_{x_0} f - \mathrm{d}'_{x_0} f)(x - x_0) = [\omega'(x - x_0) - \omega(x - x_0)] \| x - x_0 \|$, adică: $\| (\mathrm{d}_{x_0} f - \mathrm{d}'_{x_0} f)(x - x_0) \| \leqslant \| x - x_0 \| (\| \omega'(x - x_0) \| + \| \omega(x - x_0) \|)$. Fie $\varepsilon > 0$ și să alegem $\delta > 0$ astfel încît, pentru orice $\| x \| \leqslant \delta$, să avem $\| \omega'(x) \| < \varepsilon/4$ și $\| \omega(x) \| < \varepsilon/4$. Din definiția normei unei aplicații liniare continue, există y_0 cu $\| y_0 \| = 1$ astfel încît $\| (\mathrm{d}_{x_0} f - \mathrm{d}'_{x_0} f)(y_0) \| + 1/2\, \varepsilon \geqslant \| \mathrm{d}_{x_0} f - \mathrm{d}'_{x_0} f \|$. Deoarece $\| \delta y_0 \| = \delta$, urmează $\| \omega'(\delta y_0) \| < \varepsilon/4$, $\| \omega(\delta y_0) \| < \varepsilon/4$, de unde: $\delta\varepsilon = \delta \frac{\varepsilon}{2} + \delta \frac{\varepsilon}{2} > \| \delta y_0 \| (\| \omega(\delta y_0) \| + \| \omega'(\delta y_0) \|) + \delta \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \| (\mathrm{d}_{x_0} f - \mathrm{d}'_{x_0} f)(\delta y_0) \| + \delta \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \delta \| \mathrm{d}_{x_0} f - \mathrm{d}'_{x_0} f \|$, deci $\| \mathrm{d}_{x_0} f - \mathrm{d}'_{x_0} f \| = 0$. Deducem $\mathrm{d}_{x_0} f = \mathrm{d}'_{x_0} f$.

c) Fie f diferențiabilă în x_0, în raport cu norma $\| \cdot \|$. Să definim $\omega' : X \to Y$ prin: $\omega'(x) = \omega(x) \| x \| \| x \|_1^{-1}$ dacă $x \neq 0$ și $\omega'(0) = 0$. Avem: $f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}_{x_0} f(x - x_0) + \omega'(x - x_0) \| x - x_0 \|_1$ iar $\lim_{x \to 0} \omega'(x) = 0$, datorită faptului că normele sînt echivalente.

18. a) Dacă f este constantă, atunci punînd $\mathrm{d}_x f = 0$ și $\omega(x) = 0$, avem: $(y) = f(x) + \mathrm{d}_x f(y - x) + \omega(y - x) \| y - x \|$ și $\lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$. b) Dacă f este liniară și continuă, atunci punînd $\mathrm{d}_x f = f$ și $\omega(x) = 0$, avem: $f(y) = f(x) + \mathrm{d}_x f(y - x) + \omega(y - x) \| y - x \|$ și $\lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$. c) Dacă f este biliniară, atunci: $f(u, v) - f(x, y) = f(u, v) - f(u, y) + f(u, y) - f(x, y) = f(u, v - y) + f(u - x, y) = f(x, v - y) + f(u - x, y) + f(u - x, v - y)$. Să definim $\omega(u, v) = f(u, v)(\| u \| + \| v \|)^{-1}$ dacă $(u, v) \neq (0, 0)$ și $\omega(0, 0) = 0$. Atunci avem: $f(u, v) = f(x, y) + \mathrm{d}_{(x,y)} f(u - x, v - y) +$

$+ \omega(u - x, v - y) \| (u, v) - (x, y) \|$. Mai rămîne să arătăm că $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \omega(u, v) = 0$. Însă f este continuă, deci, după exercițiul V.49, există M astfel încît: $\| \omega(u, v) \| = \| f(u, v) \| (\|u\| + \|v\|)^{-1} \leqslant M \| u \| \| y \| (\| u \| + \| v \|)^{-1} \leqslant M \cdot \min\{\| u \|, \| v \|\}$.

19. Fie $\omega_1 : X \to Y$ și $\omega_2 : Y \to Z$ funcții astfel încît: $f(x) = f(x_0) + d_{x_0} f(x - x_0) + \omega_1(x - x_0) \| x - x_0 \|$; $g(y) = g(y_0) + d_{y_0} g(y - y_0) + \omega_2(y - y_0) \| y - y_0 \|$ iar $\lim_{x\to 0} \omega_1(x) = 0$ și $\lim_{y\to 0} \omega_2(y) = 0$. Avem: $g(f(x)) - g(f(x_0)) - d_{y_0} g[d_{x_0} f(x - x_0)] = \omega_2(f(x) - f(x_0)) \| f(x) - f(x_0) \| + d_{y_0} g[\omega_1(x - x_0) \| x - x_0 \|]$. Dacă notăm $\omega(x - x_0) = \omega_2(f(x) - f(x_0)) \frac{\| f(x) - f(x_0) \|}{\| x - x_0 \|} + d_{y_0} g(\omega_1(x - x_0))$, mai avem de arătat că $\lim_{x\to 0} \omega(x - x_0) = 0$. Însă: $\| f(x) - f(x_0) \| = \| d_{x_0} f(x - x_0) + \omega_1(x - x_0) \cdot x - x_0 \| \| \leqslant \| x - x_0 \| (\| d_{x_0} f \| + \| \omega_1(x - x_0) \|)$, ceea ce încheie demonstrația.

20. Avem $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n^2 | = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, ceea ce arată că f este bine definită. Fie $(x_n^0) \in l^2$. Avem: $f((x_n)) - f((x_n^0)) = (x_n^2) - (x_n^{02}) = (x_n^2 - x_n^{02}) = (2x_n^0(x_n - x_n^0)) + ((x_n - x_n^0)^2)$. Fie $T : l^2 \to l^1$, definit prin $T((u_n)) = (2x_n^0 u_n)$. Deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} | 2x_n^0 u_n | \leqslant 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n^0 |^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |^2 \right)^{1/2}$, rezultă că T este corect definit. Se observă ușor că T este liniar. Din cele de mai sus rezultă atunci și continuitatea lui T. Să notăm deci $d_{x_0} f((u_n)) = T((u_n))$ și $\omega : l^2 \to l^1$, definită prin $\omega((x_n)) = \| (x_n) \|^{-1} (x_n^2)$ dacă $(x_n) \neq 0$ și $\omega(0) = 0$. Mai avem de arătat că $\lim_{x\to 0} \omega(x) = 0$. Însă $\| \omega((x_n)) \| = \| (x_n) \|$, ceea ce demonstrează afirmația.

21. Să presupunem că $(x_n^0) \in c_0$ are proprietatea din enunț. Deoarece $x_n^0 \to 0$, rezultă că $\sup\{ | x_n^0 | \mid n \neq n_0 \} < | x_{n_0}^0 |$. Dacă $\varepsilon > 0$ este astfel încît $\sup\{ | x_n^0 | \mid n \neq n_0 \} + \varepsilon < | x_{n_0}^0 |$, iar $x \in c_0$ astfel încît $\| x - x^0 \| < \varepsilon$ atunci, în mod necesar, $\| x \| = | x_{n_0} |$, ceea ce arată că $\| x \| - \| x^0 \| = | x_{n_0} | - | x_{n_0}^0 |$. Să definim atunci $d_{x_0} f((x_n)) = (\operatorname{sgn} x_{n_0}^0) x_{n_0}$. $d_{x_0} f$ este funcțională liniară și continuă. Dacă $\| x - x^0 \| < \min\{\varepsilon, | x_{n_0}^0 |\}$ atunci $f(x) = f(x^0) + d_{x_0} f(x - x^0)$, ceea ce demonstrează suficiența condiției. Să presupunem acum f diferențiabilă în $x^0 \in c_0$ și să presupunem, prin reducere la absurd, că ar exista $n_1 \neq n_2$ astfel încît: $| x_{n_1}^0 | = | x_{n_2}^0 | = \| x^0 \|$. Să definim, pentru $k \in \mathbf{N}$: $y^k = (y_n^k) \in c_0$ și $z^k = (z_n^k) \in c_0$ prin $y_n^k = x_n^0$ dacă $n \neq n_1$ iar $y_{n_1}^k = x_{n_1}^0 \neq k^{-1}$; iar $z_n^k = x_n^0$ dacă $n \neq n_2$ și $z_{n_2}^k = x_{n_2}^0 \neq k^{-1}$, unde semnul este astfel ales ca: $| x_{n_1}^0 | > | y_{n_1}^k |$ și $| x_{n_2}^0 | > | z_{n_2}^k |$. Avem: $d_{x_0} f(y^k - x^0) = -k^{-1} \omega(y^k - x^0)$ și $d_{x_0} f(z^k - x^0) = -k^{-1} \omega(z^k - x^0)$, ceea ce conduce la relațiile contradictorii: $d_{x_0} f((x_n)) = (\operatorname{sgn} x_{n_1}^0) x_{n_1}$ și $d_{x_0} f((x_n)) = (\operatorname{sgn} x_{n_2}^0) x_{n_2}$.

22. Deoarece f este compunerea aplicațiilor $g : l^2 \to \mathbf{R}$ și $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$, definite prin $g(x) = \| x \|^2$ și $h(y) = y^{1/2}$ iar h este diferențiabilă pe $(0, \infty)$ și $d_y h(u) = 1/2u y^{-1/2}$, mai rămîne, conform exercițiului 19, să arătăm că g este peste tot diferențiabilă. Însă: $g(x) - g(x_0) = \| x \|^2 - \| x_0 \|^2 = \langle x, x \rangle - \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x, x - x_0 \rangle + \langle x - x_0, x_0 \rangle = 2\langle x - x_0, x_0 \rangle + \| x - x_0 \|^2$, deci g este diferențiabilă în x_0 și $d_{x_0} g(u) = 2\langle u, x_0 \rangle$.

23. a) Este evident că $\| 0 \|_1 = 0$. Dacă $\| x \|_1 = 0$, urmează $\| x \| = 0$ deci $x = 0$. Apoi: $\| \lambda x \|_1 = \| \lambda x \| + \| T(\lambda x) \| = |\lambda| \| x \|_1$ și $\| x + y \|_1 = \| x + y \| + \| T(x + y) \| \leqslant \| x \| + \| y \| + \| Tx \| + \| Ty \| = \| x \|_1 +$

$+ \|y\|_1$. b) $1 \Rightarrow 2$. Avem: $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant (1 + \|T\|)\|x\|$. $2 \Rightarrow 3$. Evident. $3 \Rightarrow 2$ $(X, \|\cdot\|)$ este spațiu Banach prin ipoteză, iar $\|\cdot\|_1$ este mai fină ca $\|\cdot\|$ prin construcție. Din principiul aplicației deschise, cele două norme rezultă echivalente. $2 \Rightarrow 1$. Fie M astfel încît $\|x\|_1 \leqslant M\|x\|$. Atunci $\|Tx\| = \|x\|_1 - \|x\| \leqslant (M-1)\|x\|$, ceea ce dovedește continuitatea lui T.

24. a) Deoarece X este complet, este de categoria a II-a, deci tonelat (conform exercițiului IV.14). Urmează că orice seminormă inferior semicontinuă pe X este continuă, de unde rezultatul enunțat. b) Familia $\{T_i\}_{i \in I}$ fiind punctual mărginită, rezultă că p este bine definită. Apoi: $p(\lambda x) = \sup_i \|T_i(\lambda x)\| = |\lambda| p(x)$; $p(x+y) = \sup_i \|T_i(x+y)\| \leqslant \sup_i \{\|T_i x\| + \|T_i y\|\} \leqslant p(x) + p(y)$, ceea ce arată că p este o seminormă. Fiecare aplicație $x \to \|T_i x\|$ fiind continuă, urmează (conform [18]) că p este inferior semicontinuă. Din cele de mai sus, există M astfel încît $p(x) = \sup_i \|T_i x\| \leqslant M\|x\|$, $\forall x \in X$, de unde $\|T_i\| \leqslant M$, $\forall i \in I$, adică exact concluzia din principiul mărginirii uniforme.

25. Dacă $(x_n) \in m$, există M astfel încît $|x_n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbf{N}$, deci $|x_{f(n)}| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbf{N}$, ceea ce arată că $\varphi(f)((x_n)) \in m$. Apoi: $\varphi(f)\,(\lambda(x_n))\,\mu(y_n)) = (\lambda x_{f(n)} + \mu y_{f(n)}) = \lambda\varphi(f)((x_n)) + \mu\varphi(f)((y_n))$, deci $\varphi(f)$ este liniară. În sfîrșit, $\|\varphi(f)((x_n))\| = \sup_n |x_{f(n)}| \leqslant \sup_n |x_n| = \|(x_n)\|$, deci $\varphi(f)$ este continuă și φ rezultă bine definită. Mai mult, deoarece f este bijecție, avem $\sup_n |x_{f(n)}| = \sup_n |x_n|$, ceea ce arată că $\|\varphi(f)((x_n))\| = \|(x_n)\|$ deci $\varphi(f)$ este o izometrie. Apoi $\varphi(f)\,[\varphi(g)\,((x_n))] = \varphi(f)(x_{g(n)}) = (x_{(f \circ g)n}) = \varphi(f \circ g)x_n))$. În particular, $\varphi(1_{\mathbf{N}}) = 1_m = \varphi(f \circ f^{-1}) = \varphi(f) \circ \varphi(f^{-1})$. Mai avem de arătat că φ este injectivă. Fie deci $f_1, f_2 \in \sigma(\mathbf{N})$ și să presupunem că $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$. Deci pentru fiecare $(x_n) \in m$, avem $(x_{f_1(n)}) = (x_{f_2(n)})$. Aplicînd această egalitate pentru $e_n \in m$, se ajunge la $f_1 = f_2$.

26. a) Dacă $x \in m$ și $y \in m$, avem: $|x_n y_n| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, ceea ce arată că $\psi(x)(y) \in m$. În plus: $\psi(x)\,[\lambda y + \mu y'] = (x_n(\lambda y_n + \mu y'_n)) = \lambda\psi(x)\,(y) + \mu\psi(x)(y')$, deci $\psi(x)$ este liniară. Din: $\|\psi(x)(y)\| = \sup_n |x_n y_n| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ rezultă că $\psi(x)$ este continuă, deci ψ este corect definită, iar $\|\psi(x)\| \leqslant \|x\|$. Alegînd $y = e$, obținem $\|\psi(x)\| = \|x\|$, deci ψ este o izometrie. În sfîrșit: $\psi[\lambda x + \lambda x'](y) = ((\lambda x_n + \mu x'_n)y_n) = \lambda\psi(x)(y) + \mu\psi(x')(y)$ arată că ψ este liniară. b) Avem: $\alpha(\lambda T + \mu T') = (\lambda T + \mu T')(e) = \lambda Te + \mu T'e = \lambda\alpha(T) + \mu\alpha(T')$, deci α este liniară. Apoi: $\|\alpha(T)\| = \|Te\| \leqslant \|T\|\,\|e\| = \|T\|$, deci α este continuă. Luînd $T = 1_m$, avem $\|\alpha(1_m)\| = \|e\| = 1$, deci $\|\alpha\| = 1$. Pentru orice $x = (x_n) \in m$, avem: $\alpha[\psi(x)] = \psi(x)(e) = (x_n) = x$, deci $\alpha \circ \psi = 1_m$. De aici rezultă, în particular, și faptul că α este surjectivă. Pentru a arăta că $\psi \circ \alpha \neq 1_{L(m)}$, este suficient să constatăm că α nu este injectivă. Definind $T(y) = (y_2, y_3, \ldots)$, se arată imediat că $T \in L(m)$. Deoarece $\alpha(T) = T(e) = e = \alpha(1_m)$, urmează că α nu este injectivă.

27. a) Deoarece $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este o bază Schauder în c_0, existența și unicitatea coeficienților $\{\alpha_{mn}\}$ este asigurată. Deoarece $T(e_n) \in c_0$, avem $\lim_{m \to \infty} \alpha_{mn} = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Fie acum $\alpha_{mn} = e^{i\theta mn}\,|\alpha_{mn}|$ și $x^k = \sum_{n=1}^{k} e^{-i\theta mn} e_n$. Deci $\|x^k\| = 1$

și $\| Tx^k \| \leqslant \| T \|$. Însă $\| Tx^k \| \geqslant \sum_{n=1}^{k} | \alpha_{mn} |$, ceea ce arată că $| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} | < \infty$ și chiar $\sup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_{mn} | \leqslant \| T \|$. În sfîrșit, oricare ar fi $x \in m$ cu $\| x \| \leqslant 1$, adică $| x_n | \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, putem scrie: $\| Tx \| = \| T \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} x_n Te_n \| =$

$= \| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} e_m \| = \| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n e_m | = \sup_{m \in \mathbf{N}} | \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n | \leqslant \sup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_{mn} |$,

deci $\| T \| \leqslant \sup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_{mn} |$. b) Datorită condiției 1°, seria $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{mn} e_m$ converge în c_0, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$. Deoarece $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este bază Schauder în c_0, există cel mult un $T \in L(c_0)$ care să satisfacă (*). Să arătăm deci existența. Fie $x \in c_0$ oarecare și să definim $Tx = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n e_m$. Deoarece $\| Tx \| =$

$= \| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n e_m \| = \sup_{m \in \mathbf{N}} | \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n | \leqslant \sup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_{mn} x_n | \leqslant \| x \| \sup_{m \in \mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} | \alpha_{mn} |$,

deducem că seria considerată este convergentă, deci T este bine definit. T fiind evident liniar, inegalitatea precedentă asigură continuitatea lui T.

28. a) Deoarece $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este bază Schauder în l^1, existența și unicitatea coeficienților α_{mn} este asigurată. Dacă $\alpha_{mn} = | \alpha_{mn} | e^{i\theta mn}$ atunci, notînd $x = \sum_{n=1}^{k} e^{-i\theta mn} e_n$, avem: $\| Tx \| = \| T \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} x_n Te_n \| =$

$= \| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} x_n \alpha_{mn} e_m \| = \sum_{m=1}^{k} | \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_{mn} | = \sum_{m=1}^{k} | \alpha_{mn} |$, de unde $\| T \| \geqslant$

$\geqslant \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{m=1}^{\infty} | \alpha_{mn} |$. Dacă $x \in l^1$ este oarecare, cu $\| x \| \leqslant 1$, avem: $\| Tx \| =$

$= \sum_{m=1}^{\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_{mn} | \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} | x_n | | \alpha_{mn} | \leqslant \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{m=1}^{\infty} | \alpha_{mn} |$, ceea ce arată că $\| T \| \leqslant \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{m=1}^{\infty} | \alpha_{mn} |$. b) Datorită condiției 1°, seria $Tx = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} x_n e_m$ este convergentă în l^1 și $\| Tx \| \leqslant \| x \| (\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{m=1}^{\infty} | \alpha_{mn} |)$, ceea ce dovedește Continuitatea lui T, liniaritatea fiind ușor de verificat.

29. Fie $M = \liminf_{n \to \infty} \| T_n \|$. Deci, $\forall \varepsilon > 0$, există un subșir $\{T_{n_k}\}$ astfel încît $(M + \varepsilon) > \| T_{n_k} \|$, de unde $\| T_{n_k} x \| \leqslant (M + \varepsilon) \| x \|$. Trecînd la limită, obținem $\| T_0 \| \leqslant M + \varepsilon$. ε fiind arbitrar, afirmația rezultă.

30. Dacă $x_n \in X_1$ este un șir convergent la $x \in X$, atunci $\{T_1 x_n\}$ conține un subșir convergent, datorită compacității lui T_1 și mărginirii lui $\{x_n\}$. Deoarece $\{x_n\}$ este convergent, $\{T_1 x_n\}$ este șir Cauchy. Conținînd un subșir convergent, urmează că $\{T_1 x_n\}$ este convergent. Rezultă că operatorul T există. Din construcția precedentă deducem că $T(B) \subseteq \overline{T_1(B_1)}$, deci $T(B)$ este relativ compact și T este compact.

31. Fie $B = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$. Mulțimea $T(B) \subseteq Y$ este relativ compactă și metrizabilă, deci separabilă. Deoarece $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$, rezultă că $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B)$, deci $T(X)$ este separabil.

32. Fie $\mu \in \mathcal{C}([0, 1])^*$ și g funcția cu variație mărginită asociată, deci $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\, dg(t)$, $\forall x \in \mathcal{C}([0, 1])$. Se constată imediat că μ este funcțională pozitivă dacă și numai dacă funcția g este monoton crescătoare. Conform teoremei lui Jordan, oricare ar fi g cu variație mărginită pe $[0, 1]$, există g_1, g_2 funcții monoton crescătoare pe $[0, 1]$, astfel încît $g = g_1 - g_2$ pe $[0, 1]$. Notînd $\mu_k = \int_0^1 x(t)\, dg_k(t)$, $k = 1, 2$, μ_1 și μ_2 sînt funcționale pozitive, iar $\mu = \mu_1 - \mu_2$

33. Conform exercițiului I.11, avem $Tx = y$, unde $y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i$. Continuitatea lui T în cele nouă cazuri este asigurată de următoarele inegalități:

$$\| Tx \|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \right)^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \right) \leqslant \| x \|_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 \right)^{1/2};$$

$$\| Tx \|_1 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \right)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_{ij}|^2 \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \| x \|_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_{ij}|^2 \right)^{1/2}; \quad \| Tx \|_1 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \right)^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left((\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|)^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right)^2 \right)^{1/2} = \| x \|_3 \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right)^2 \right)^{1/2};$$

$$\| Tx \|_2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \| x \|_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|; \quad \| Tx \|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j| =$$

$$= \| x \|_2 \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_{ij}|; \quad \| Tx \|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| =$$

$$= \| x \|_3 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|; \quad \| Tx \|_3 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \leqslant$$

$$\leqslant (\max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |\alpha_{ij}|) \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \| x \|_2 \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |\alpha_{ij}| \leqslant \| x \|_1 \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |\alpha_{ij}|;$$

$$\| Tx \|_3 \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |x_j| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |x_j| =$$

$$= \| x \|_3 \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|.$$

34. a) Dacă T nu este injectiv, există $x_0 \neq 0$ astfel încît $Tx_0 = 0$. Cu exercițiul V.52, există $X_2 \subseteq X$ astfel încît $X = \Gamma x_0 \oplus X_2$ să fie sumă directă topologică. Notînd $S : X \to X$ proiecția pe Γx_0, avem deci $S \in L(X)$ și $S \neq 0$. Dar $TSx = T(\lambda x_0) = 0$, oricare ar fi $x \in X$. Reciproc, să presupunem că $TS = 0$ cu $S \neq 0$. Există deci $x \neq 0$ astfel încît $Sx \neq 0$. Urmează $TSx = 0$, deci $Sx \in \operatorname{Ker} T$, ceea ce arată că T nu este injectiv. b) Să presupunem că $\overline{T(X)} \neq Y$. Există deci $y_0 \in Y$, $y_0 \notin \overline{T(X)}$. Aplicînd exercițiul III.44, există un subspațiu liniar maximal închis $Y_1 \subseteq Y$, astfel încî $\overline{T(X)} \subseteq Y_1$ și $y_0 \in Y_1$. Cu exercițiul V.52, există $Y_2 \subseteq Y$ astfel încît suma directă $Y = Y_1 \oplus Y_2$ să fie topologică. Fie $S : Y \to Y$ proiecția pe Y_2, deci $S \in L(Y)$ și $S \neq 0$. Oricare ar fi $x \in X$, avem $Tx \in Y_1$, deci $STx = 0$. Reciproc, dacă există $S \neq 0$ încît $ST = 0$, rezultă că există $y \neq 0$ astfel încît $Sy = 0$. Din $ST = 0$ urmează $y \notin T(X)$. Dacă $y \in \overline{T(X)}$, ar exista însă $y_n \in T(X)$ astfel încît $y = \lim_{n \to \infty} y_n$, de unde $Sy = \lim_{n \to \infty} Sy_n = 0$, contradicție. Deci $y \notin \overline{T(X)}$, adică $\overline{T(X)} \neq Y$.

35. a) Aplicînd exercițiul V.52, există subspațiile finit dimensionale $X_1 \subseteq X$ și $Y_1 \subseteq Y$ astfel încît $X = \operatorname{Ker} T \oplus X_1$ și $Y = T(X) \oplus Y_1$ să fie sume directe topologice. $T|_{X_1} : X_1 \to T(X_1)$ este inversabil. Fie $S : Y \to X$, definit prin $Sy = x_1$, unde $y = y_1 + y_2$ cu $y_1 \in T(X_1)$, $y_2 \in Y_1$, iar $Tx_1 = y_1$. Avem $S \in L(Y, X)$, iar $(ST - 1_X)(x) = S(Tx) - x = x_2 - (x_1 + x_2) = -x_1$ (unde $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in \operatorname{Ker} T$ și $x_2 \in X_1$). Deci $ST - 1_X$ este de rang finit, avînd imaginea inclusă în $\operatorname{Ker} T$. Apoi: $(TS - 1_Y)y = T(Sy) - y = y_1 - (y_1 + y_2) = -y_2$. Deoarece $y_2 \in Y_1$, rezultă că și $TS - 1_Y$ este de rang finit. b) Avem $\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker} S_1 T \subseteq \operatorname{Ker}(1_X - K_1)$, unde K_1 este compact prin ipoteză, deci $\operatorname{Ker} T$ este de dimensiune finită. Apoi: $T(X) \supseteq TS_1(X) = (1_Y - K_2)(X)$, unde K_2 este compact, deci $T(X)$ este de dimensiune finită. Faptul că $T(X)$ este închis urmează din exercițiul III.20. Deci T este operator Fredholm. c) (*i*) Fie $S \in L(Y, X)$ astfel încît $ST - 1_X$ și $TS - 1_Y$ să fie operatori de rang finit. Avem: $S(T + K) - 1_X = (ST - 1_X) + SK$ și $(T + K)S - 1_Y = (TS - 1_Y) + KS$, deci sînt operatori compacți; cu pct. b), $(T + K)$ rezultă operator Fredholm. (*ii*) Fie $S \in L(Y, X)$ astfel încît $ST - 1_X$ și $TS - 1_Y$ să fie operatori de rang finit. Dacă X este finit dimensional și Y este finit dimensional, orice operator din $L(X, Y)$ este operator Fredholm, deci demonstrația este încheiată. Dacă nu, $S \neq 0$. Fie atunci $T_1 \in L(X, Y)$ astfel încît $\|T_1 - T\| < \|S\|^{-1}$. Să arătăm că T_1 este operator Fredholm. Deoarece $\|S(T_1 - T)\| < 1$, rezultă că $1_X - S(T - T_1)$ este inversabil. Fie $U = (1_X - S(T - T_1))^{-1}$ și $S_1 = US$. Avem: $ST_1 = ST - S(T - T_1) = (ST - 1_X) + 1_X - S(T - T_1)$, de unde $S_1 T_1 = UST_1 = U(ST - 1_X) + 1_X$, adică $S_1 T_1 - 1_X$ este operator de rang finit. Pornind de la $\|(T - T_1)S\| < 1$, se găsește o relație similară, dovedind că T_1 este operator Fredholm. (*iii*) Fie $S_1 T - 1_X$ de rang finit și $S_2 S - 1_Y$ de rang finit. Avem: $S_1 S_2)(ST) = S_1(S_2 S - 1_Y + 1_Y)T = S_1(S_2 S - 1_Y)T + S_1 T = S_1(S_2 S - 1_Y)T + (S_1 T - 1_X) + 1_X$, ceea ce arată că $(S_1 S_2)(ST) - 1_X$ este de rang finit. Analog se mai demonstrează o relație, dovedind că ST este operator Fredholm.

VII. DUALITATE

1. Deoarece f este continuă, există C și $y_1, \ldots, y_n \in Y$ astfel încît $|f(x)| \leqslant C \sup_{1\leqslant i\leqslant n} p_{y_i}(x)$; adică $|f(x)| \leqslant C \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\Phi(x, y_i)|$. De aici deducem că $\Phi(x, y_i) = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$ implică $f(x) = 0$. Aplicînd exercițiul II.13, rezultă că există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$, astfel încît $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(x, y_i)$, adică $f(x) = \Phi\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)$, $\forall\, x \in X$. Deci $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ satisface. y este unic dacă și numai dacă $\Phi(x, y) = \Phi(x, y')$, $\forall\, x \in X$, implică $y = y'$; adică dacă și numai dacă $p_y(x) = 0$, $\forall\, x \in X$, implică $y = 0$. Această afirmație este însă echivalentă cu faptul că familia de seminorme $\{p_y\}_{y\in Y}$ este suficientă, deci că $\sigma(X, Y)$ este separată. În sfîrșit, deoarece Φ este biliniară, $x \to \Phi(x, y)$ este funcțională liniară. Deoarece $p_y(x) = |\Phi(x, y)|$, deducem continuitatea aplicației considerate.

2. a) Fie $y_1, y_2 \in M^0$ și $\lambda \in [0, 1]$. Pentru $x \in M$ avem: $\Phi(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2) = \lambda \Phi(x, y_1) + (1 - \lambda)\Phi(x, y_2) \leqslant 1$, deci $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \in M^0$. Deoarece $y \to \Phi(x, y)$ este continuă, pentru fiecare $x \in X$, mulțimea $\{y \in Y \mid |\Phi(x, y)| \leqslant 1\}$ este $\sigma(Y, X)$ — închisă. M^0 rezultă atunci $\sigma(Y, X)$ — închisă, ca intersecție de astfel de mulțimi. b) Fie $y \in M^0$ și $\lambda \in \Gamma$ cu $|\lambda| \leqslant 1$. Avem: $\Phi(x, \lambda y) = \lambda \Phi(x, y) = \Phi(\lambda x, y) \leqslant 1$, căci $\lambda x \in M$. Dacă M este subspațiu liniar, atunci avem $nx \in M$ și $(-n)\, x \in M$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ și $x \in M$. Deci, dacă $y \in M^0$ atunci: $\Phi(nx, y) \leqslant 1$ și $\Phi(-nx, y) \leqslant 1$, ceea ce implică $\Phi(x, y) = 0$. Deci $M^0 \subseteq \{y \in Y \mid \Phi(x, y) = 0, \ \forall\, x \in M\}$. Incluziunea inversă este întotdeauna adevărată. Fie acum $y_1, y_2 \in M^0$ și $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$. Avem: $\Phi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \Phi(x, y_1) + \lambda_2 \Phi(x, y_2) = 0$, deci $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in M^0$, care rezultă subspațiu liniar. c) Fie $y \in N^0$ deci $\Phi(x, y) \leqslant 1$, $\forall\, x \in N$. Deoarece $\lambda M \subseteq N$, rezultă că $\Phi(\lambda x_1, y) \leqslant 1$, $\forall\, x_1 \in M$ sau $\Phi(x_1, \lambda y) \leqslant 1$, $\forall\, x_1 \in M$, adică $\lambda y \in M^0$, de unde $y \in \lambda^{-1} M^0$. d) Avem echivalențele: $(y \in \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha^0) \Leftrightarrow (\Phi(x, y) \leqslant 1, \ \forall\, x \in M_\alpha, \ \alpha \in A) \Leftrightarrow (\Phi(x, y) \leqslant 1, \ \forall\, x \in \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha) \Leftrightarrow (y \in [\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha]^0)$.

3. Fie $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ deci $M^0 = \{y \in Y \mid \Phi(x_1, y) \leqslant 1, \ldots, \Phi(x_n, y) \leqslant 1\}$, de unde $M^0 \subseteq \{y \in Y \mid \sup_{1\leqslant i\leqslant n} p_{x_i}(y) \leqslant 1\} = V(0;\ x_1, \ldots, x_n, 1)$. Reciproc, dacă V este $\sigma(Y, X)$ — vecinătate a originii, există $x_1, \ldots, x_n$ și $\varepsilon > 0$ astfel încît $V(0, x_1, \ldots, x_n;\ \varepsilon) \subseteq V$. Considerînd $M = \{\pm \varepsilon^{-1} x_1, \ldots, \pm \varepsilon^{-1} x_n\}$, avem $M^0 \subseteq V(0, x_1, \ldots, x_n;\ \varepsilon) \subseteq V$.

4. Este evident că $M \cup \{0\} \subseteq {}^0M^0$. Deoarece ${}^0M^0$ este convexă și $\sigma(X, Y)$ — închisă, deducem $\overline{\text{co}}\,(M \cup \{0\}) \subseteq {}^0M^0$. Să presupunem că există $x_0 \in {}^0M^0$ astfel încît $x_0 \notin \overline{\text{co}}(M \cup \{0\})$. Aplicînd exercițiul IV.23 și ținînd seama și de exercițiul 1, există $y \in Y$ astfel încît $\Phi(x_0, y) > 1$, iar $\Phi(x, y) \leqslant 1$, $\forall\, x \in \overline{\text{co}}(M \cup \{0\})$. În particular, $\Phi(x, y) \leqslant 1$, $\forall\, x \in M$, adică $y \in M^0$. Însă $x_0 \in {}^0M^0$ deci $\Phi(x_0, y) \leqslant 1$, ceea ce contrazice relația de mai sus. În sfîrșit, deoarece $M \subseteq {}^0M^0$, avem $M^0 \supseteq [{}^0M^0]^0$. Fie acum $y \in M^0$ deci $\Phi(x, y) \leqslant 1$, $\forall\, x \in M$. Deoarece Φ este liniară în prima variabilă, $\Phi(0, y) \leqslant 1$ și apoi $\Phi(u, y) \leqslant 1$, $\forall u \in \text{co}(M \cup \{0\})$, deci $y \in \text{co}(M \cup \{0\})^0$. În sfîrșit, Φ este continuă în prima variabilă, deci $\Phi(u, y) \leqslant 1$, $\forall\, u \in \overline{\text{co}}(M \cup \{0\})$, ceea ce arată că $M^0 \subseteq [\overline{\text{co}}(M \cup \{0\})]^0 = [{}^0M^0]^0$.

5. Injectivitatea lui φ este o reformulare a exercițiului 1. Fie V o vecinătate a originii în X; există deci $y_1, \ldots, y_n \in Y$ și $\varepsilon > 0$ astfel încît $V(0, y_1, \ldots, y_n;\ \varepsilon) \subseteq V$. Să notăm $U_y = \{\lambda \in \Gamma \mid |\lambda| < \varepsilon\}$ dacă $y \in \{y_1, \ldots, y_n\}$ și $U_y = \Gamma$ în rest. Deci $U = \prod_{y\in Y} U_y$ este o vecinătate a originii în Γ^Y și avem

$U \cap \varphi(X) \subseteq \varphi(V)$ iar $U \cap \varphi(X) = \varphi(V(0, y_1, \ldots, y_n; \varepsilon))$. Aceste formule demonstrează că φ este homeomorfism. Fie acum $f : Y \to \Gamma$ încît $f \in \overline{\varphi(X)}$. Fie $y_1, y_2 \in Y$ și $\varepsilon > 0$. Deoarece $\{f + V(0, y_1, y_2, y_1 + y_2; \varepsilon)\} \cap \varphi(X) \neq \emptyset$, există o aplicație liniară $g : Y \to \Gamma$, astfel încît $f - g \in V(0, y_1, y_2, y_1 + y_2; \varepsilon)$, adică $|f(y_1) - g(y_1)| < \varepsilon$, $|f(y_2) - g(y_2)| < \varepsilon$ și $|f(y_1 + y_2) - g(y_1 + y_2)| < \varepsilon$. Deducem: $|f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2)| \leqslant |f(y_1 + y_2) - g(y_1 + y_2)| + |f(y_1) - g(y_1)| + |f(y_2) - g(y_2)| < 3\varepsilon$. Cum ε este arbitrar, urmează $f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2)$. Analog, fie $y \in Y$, $\lambda \in \Gamma$ și $\varepsilon > 0$. Scriind că $\{f + V(0, y, \lambda y; \varepsilon)\} \cap \varphi(X) = \emptyset$, arătăm ca mai sus că $f(\lambda y) = \lambda f(y)$, deci că f este liniară.

6. Prin identificarea de la exercițiul 5, $B \subseteq \Gamma^{X^*}$. În plus, notînd $U_y = \{\lambda \in \Gamma \mid |\lambda| < \|y\|\}$, mulțimea $U = \prod_{y \in Y} U_y$ este compactă (exercițiul I.19) iar $B \subseteq U$. Este suficient deci să verificăm că B este închisă. Deoarece orice $f \in \bar{B}$ este liniară, conform exercițiului 5, mai rămîne să arătăm că orice $f \in \bar{B}$ este continuă și $\|f\| \leqslant 1$. Fie $x \in X$ și $\varepsilon > 0$. Deoarece $f + V(0, x; \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, există $g \in B$ astfel încît $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Deducem: $|f(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leqslant \varepsilon + \|x\|$. Deoarece ε este oarecare, $|f(x)| \leqslant \|x\|$, $\forall x \in X$, ceea ce arată că f este continuă și $\|f\| \leqslant 1$.

7. Dacă M este $\sigma(X, X^*)$ — închisă, atunci M este închisă fără nici o ipoteză suplimentară. Reciproc, fie M convexă și închisă. Dacă $M = \emptyset$ sau $M = X$, evident M este $\sigma(X, X^*)$ — închisă. Dacă nu, conform exercițiului IV.20, M este intersecția semispațiilor care o conțin. Însă orice funcțională liniară continuă este și slab continuă, deci orice semispațiu este o mulțime $\sigma(X, X^*)$ — închisă. Același lucru este valabil deci și pentru M.

8. a) Fie $x \in [0, 1]$ și $\varphi(f) = f(x)$. φ este evident liniară iar $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$ arată că φ este continuă pe $\mathcal{C}([0, 1])$. Deci $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$, adică $f_n(x) \to f(x)$. b) Șirul fiind mărginit, rezultă că se poate aplica teorema lui Lebesgue, pentru a deduce $\int_0^1 f_n(x)\, dg(x) \to \int_0^1 f(x)\, dg(x)$, pentru orice funcție g, cu variație mărginită pe $[0, 1]$ (conform [18]). c) Avem (conform figurii 12) $f_n(0) = 0$. Dacă $x > 0$, există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît $2n_0^{-1} < x$, deci pentru $n \geqslant n_0$ avem $f_n(x) = 0$, ceea ce arată că $f_n(x) \to 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Însă $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$, ceea ce arată că f_n nu converge slab la 0.

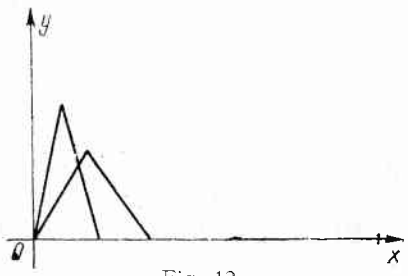

Fig. 12

9. a) Să notăm $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, deci prin ipoteză f este bine definită și este evident liniară. Șirul $\{f_n(x)\}$, fiind convergent, este mărginit, $\forall x \in X$. Aplicînd principiul mărginirii uniforme, rezultă că $\{\|f_n\|\}$ este șir mărginit. Dacă $\|f_n\| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbf{N}$, atunci $|f(x)| \leqslant M\|x\|$, ceea ce demonstrează continuitatea lui f. Faptul că $f_n \to f$ slab * rezultă direct din definiția lui f. b) Identificînd X cu X^{**} prin izomorfismul natural, de la punctul precedent urmează existența unui element $\alpha \in X^{**}$ astfel încît $x_n \to \alpha$ slab* în X^{**}. Izomorfismul natural fiind surjectiv prin ipoteză, rezultă că α se poate identifica cu un element $x \in X$, iar $x_n \to x$ slab. c) Fie $x_0(t) = 0$ dacă $t \in [0, 1)$ și $x_0(1) = 1$. Deoarece $x_n(t) \to x_0(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, din teorema lui Lebesgue urmează că, pentru orice $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1])^*$, $\{\varphi(x_n)\}$ este un șir convergent. Însă, presupunînd că $x_n \to x$ slab, ar urma $x_n(t) \to x(t)$, $\forall t \in [0, 1]$, deci $x = x_0$; contradicție, căci x_0 nu este continuă.

10. Fie $F : X \to X^{**}$ izomorfismul natural. Deoarece X^{**} este spațiu Banach, $\overline{F(X)}$ este spațiu Banach. Deoarece $F(X)$ este dens în $\overline{F(X)}$ și izomorf cu X, rezultă că $\overline{F(X)}$ este izometric cu completatul lui X.

11. Avem, dacă $y = (y_n) \in c_{00}$: $f_n(\lambda x + \mu y) = n(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y)$, deci f_n este liniară. Apoi $|f_n(x)| = n|x_n| \leqslant n \sup_{k \in \mathbf{N}} |x_k| = n\|x\|$, deci f_n este continuă. Fie $x \in c_{00}$, deci există n_0 astfel încît $x_n = 0$, $\forall n \geqslant n_0$. Atunci $|f_n(x)| \leqslant n_0 \|x\|$, $\forall n \in \mathbf{N}$, ceea ce arată că familia $\{f_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ este punctual mărginită. Însă $\|f_n\| \geqslant |f_n(e_n)| = n$, ceea ce arată că șirul $\{\|f_n\|\}$ nu este mărginit. Acest rezultat arată că, în principiul mărginirii uniforme, nu se poate renunța la ipoteza ca X să fie complet.

12. Fie $K = \{f \in X^* \mid \|f\| \leqslant 1\}$. Din exercițiul 6 urmează că mulțimea K este slab* compactă. Pentru fiecare $x \in X$, aplicația $\widetilde{x} : K \to \Gamma$, definită prin $\widetilde{x}(f) = f(x)$, este continuă, iar $\|\widetilde{x}\| = \sup_{f \in K} |x(f)| = \|x\|$, ceea ce arată că, prin corespondența $x \to \widetilde{x}$, s-a realizat o izometrie între X și $\mathcal{C}(K)$.

13. Evident, putem presupune că $x_0 \notin C$. Deoarece C este slab închisă, iar $\{x \in X \mid \|x - x_0\| \leqslant d(x_0, C) + 1\}$ este o mulțime slab compactă (conform exercițiului 6), rezultă că $C \cap \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leqslant d(x_0, C) + 1\}$ este slab compactă. Deoarece, conform exercițiului 14, aplicația $x \to \|x - x_0\|$ este slab inferior semicontinuă, rezultă că există cel puțin un $x' \in C$ astfel încît $\|x' - x_0\| = \inf_{x \in C} \|x - x_0\|$, adică există cel puțin un punct de cea mai bună aproximare pentru x_0.

14. Avînd în vedere definiția semicontinuității inferioare, este suficient să arătăm că $\{x \mid \|x\| \leqslant \alpha\}$ este o mulțime slab închisă în X. $\forall \alpha \in \mathbf{R}$. Însă mulțimea considerată este închisă și convexă, deci slab închisă.

15. Se știe că pentru fiecare $\mu \in \mathcal{C}([0, 1])^*$ există o funcție $f \in BV$ continuă la dreapta astfel încît: $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\, df(t)$, $\forall\, x \in \mathcal{C}([0, 1])$ și $\|\mu\| = \bigvee_0^1 f$. Din construcție rezultă că $f(0) = 0$, deci $f \in BV_0$. Dacă ar exista $f_1 \in BV_0$ cu aceleași proprietăți, ar urma: $\int_0^1 x(t) d[f(t) - f_1(t)] = 0$, $\forall x \in \mathcal{C}([0, 1])^*$, deci din continuitatea la dreapta urmează $f - f_1$ constantă pe $[0, 1]$. Deoarece $f(0) = f_1(0) = 0$, urmează $f = f_1$. Avem deci o corespondență $\mathcal{C}([0, 1])^* \to BV_0$, care asociază fiecărui $\mu \in \mathcal{C}([0, 1])^*$ funcția $f \in BV_0$. Deoarece: $(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)(x) = \lambda_1 \mu_1(x) + \lambda_2 \mu_2(x) = \lambda_1 \int_0^1 x(t)\, df_1(t) + \lambda_2 \int_0^1 x(t)\, df_2(t) = \int_0^1 x(t)\, d[\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)]$, rezultă că această corespondență este liniară. Egalitatea $\|\mu\| = \bigvee_0^1 f$ arată că această corespondență este o izometrie, deci este continuă și injectivă. În sfîrșit, pentru orice $f \in BV_0$ putem defini $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\, df(t)$, $\forall\, x \in \mathcal{C}([0, 1])$. Este evident că μ astfel definit este liniar; din inegalitatea: $|\mu(x)| \leqslant \|x\| \bigvee_0^1 f$ deducem că μ este continuu, adică $\mu \in \mathcal{C}([0,1])$. Cu acestea, corespondența $\mathcal{C}([0, 1])^* \to BV_0$ rezultă surjectivă.

16. Vom defini $\varphi : l^1 \to (c_0)^*$ prin $\varphi(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, unde $y = (y_n) \in l^1$ și $x = (x_n) \in c_0$. Arătăm întîi că $\varphi(y) : c_0 \to \Gamma$ este bine definită, liniară și

continuă. Din: $\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|x\|\,\|y\|$ rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este absolut convergentă, deci $\varphi(y)$ este corect definită. Apoi:

$$\varphi(y)(\lambda x + \mu x') = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n + \mu x_n') y_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} x_n' y_n = \lambda\, \varphi(y)(x) +$$

$+ \mu\varphi(y)(x')$, deci $\varphi(y)$ este liniară. Din $|\varphi(y)(x)| \leqslant \|y\|\,\|x\|$, deducem că $\varphi(y)$ este continuă și $\|\varphi(y)\| \leqslant \|y\|$. În particular, φ este bine definită. Apoi: $\varphi(\lambda y + \mu y')(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\lambda y_n + \mu y_n') = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n' =$

$= \lambda\varphi(y)(x) + \mu\varphi(y')(x)$, $\forall\, x \in c_0$, ceea ce arată că φ este liniară. Inegalitatea $\|\varphi(y)\| \leqslant \|y\|$ arată că φ este continuă. În plus, pentru fiecare $y \in l^1$, să notăm $y_n = |y_n| e^{i\theta_n}$ și, pentru fiecare $k \in \mathbf{N}$, fie $x^k = (e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{-i\theta_k}, 0, \ldots)$. Avem: $|\varphi(y)(x^k)| = \sum_{n=1}^{k} |y_n|$, deci din $\|x^k\| \leqslant 1$ deducem: $\|\varphi(y)\| \geqslant$

$\geqslant \sum_{n=1}^{k} |y_n|$, $\forall\, k \in \mathbf{N}$, adică $\|\varphi(y)\| \geqslant \|y\|$. Rezultă că φ este izometrică, în particular injectivă. Fie acum $f \in (c_0)^*$ și să definim $y_n = f(e_n)$. Avem: $\sum_{n=1}^{k} |y_n| =$

$= f(x^k) \leqslant \|f\|$, ceea ce arată că $y = (y_n) \in l^1$. Mai avem de verificat că $\varphi(y)(x) = f(x)$, $\forall\, x \in c_0$. Însă: $\varphi(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) =$

$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n f(e_n) = \lim_{k\to\infty} f\left(\sum_{n=1}^{k} x_n e_n\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n e_n\right) = f(x)$, ultima egalitate rezultînd din faptul că $\{e_n\}$ este o bază Schauder în c_0.

17. Dacă M este mărginită, există $\alpha > 0$ astfel încît $M \subseteq \{x \in X \mid \|x\| \leqslant \alpha\}$. Urmează că $\{x \in X \mid \|x\| \leqslant \alpha\}^0 \subseteq M^\circ$, adică $\{f \in X^* \mid \|f\| \leqslant \alpha^{-1}\} \subseteq M^\circ$, deci M° este vecinătate a originii în X^*. Reciproc, dacă M^0 este vecinătate a originii în X^*, există $\alpha > 0$ astfel încît $\{f \in X^* \mid \|f\| < \alpha\} \subseteq M^\circ$, de unde: $M \subseteq {}^\circ M^\circ \subseteq {}^\circ \{f \in X^* \mid \|f\| < \alpha\} \subseteq \{x \in X \mid \|x\| < \alpha^{-1},\}$ deci M este mărginită. Dacă N este mărginită, există $\alpha > 0$ astfel încît $N \subseteq \{f \in X^* \mid \|f\| \leqslant \alpha\}$. Urmează ${}^\circ\{f \in X^* \mid \|f\| \leqslant \alpha\} \subseteq {}^\circ N$, adică $\{x \in X \mid \|x\| \leqslant \alpha^{-1}\} \subseteq {}^\circ N$, deci ${}^\circ N$ este vecinătate a originii în X. Reciproc, dacă ${}^\circ N$ este vecinătate a originii în X, există $\alpha > 0$ astfel încît $\{x \in X \mid \|x\| < \alpha\} \subseteq {}^\circ N$, de unde: $N \subseteq {}^\circ N^\circ \subseteq \{x \in X \mid \|x\| < \alpha\}^\circ \subseteq \{f \in X^* \mid \|f\| < \alpha^{-1}\}$, deci N este mărginită.

18. a) Dacă X^* este de dimensiune algebrică finită, atunci dualul algebric X^{*a} al lui X^* este de dimensiune algebrică finită. Deci X^{**} este, de asemenea, de dimensiune algebrică finită. Deoarece izomorfismul natural $X \to X^{**}$ este injectiv, urmează că X este de dimensiune algebrică finită. b) Dacă topologia slabă coincide cu topologia normei, rezultă că există $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ astfel încît $V(0, f_1, \ldots, f_n; 1) \subseteq \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$, deci astfel încît $|f_i(x)| \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, să implice $\|x\| \leqslant 1$. Deci $f_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, implică $\|x\| = 0$, adică $x = 0$. În particular, oricare ar fi $f \in X^*$, există $\alpha_i \in \Gamma$ încît $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, pe baza exercițiului II.13. Deci $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este un

sistem de generatori în X^*, care rezultă astfel de dimensiune algebrică finită. Cu cele de mai sus, X este de dimensiune algebrică finită. Reciproc, dacă X este de dimensiune algebrică finită, exercițiul III.20 arată că topologia normei și topologia slabă coincid, fiind separate.

19. A se consulta [14].

20. Mulțimea $B = \{x \in l^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ este convexă și închisă, deci este slab închisă. Deducem că închiderea slabă a mulțimii $S = \{x \in l^2 \mid \|x\| = 1\}$ este inclusă în B. Să arătăm că orice $x \in B$ este aderent slab mulțimii S. Fie V o vecinătate slabă a lui x, deci există $y_1, \ldots, y_n \in l^2$ și $\varepsilon > 0$ astfel încît $x + V(0, y_i, \ldots, y_n; \varepsilon) \subseteq V$. Deci $|<x - z, y_i>| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, implică $z \in V$. Este suficient să arătăm că există $z_0 \in l^2$ astfel încît $z_0 \in S$ și $|<x - z_0, y_i>| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Deoarece subspațiul liniar generat de $\{y_1, \ldots, y_n\}$ este finit dimensional, există $t \in l^2$ astfel încît $<t, x> = 0$ și $<t, y_i> = 0$, $i = 1, \ldots, n$, iar $t \neq 0$. Să definim atunci: $z_0 = x + (1 - \|x\|^2)^{1/2} \|t\|^{-1} t$. Avem: $\|z_0\|^2 = \|x\|^2 + (1 - \|x\|^2)\, \|t\|^{-2} \|t\|^2 = 1$, deci $z_0 \in S$; iar $|<x - z_0, y_i>| = 0$, ceea ce arată că $z_0 \in V$.

21. Ținînd seama că topologia normei este mai fină decît topologia slabă, rezultă că orice mulțime mărginită este și slab mărginită. Reciproc, fie $M \subseteq X$ o mulțime slab mărginită și să notăm $M_1 = \{f_x \mid x \in M\}$, unde $f_x \in X^{**}$ este definită prin $f_x(x^*) = x^*(x)$. Datorită ipotezei, M_1 este punctual mărginită: în adevăr, pentru fiecare $x^* \in X^*$, $V(0, x^*; 1)$ este o vecinătate slabă a originii; există deci $\alpha > 0$ astfel încît $\alpha M \subseteq V$, adică $|x^*(\alpha x)| < 1$, oricare ar fi $x \in M$, adică $|f_x(x^*)| < \alpha^{-1}$, $\forall f_x \in M_1$. Deoarece X^* este spațiu Banach, din principiul mărginirii uniforme rezultă că există $\alpha > 0$ încît $\|f_x\| < \alpha$, $\forall x \in M$. Avînd în vedere că $\|f_x\| = \|x\|$, deducem că M este mărginită

22. Fie $M \subseteq X^*$. Dacă M este mărginită, M este și slab* mărginită, deoarece topologia normei este mai fină ca topologia slab*. Reciproc, să presupunem că M este slab* mărginită. În particular, pentru fiecare $x \in X$, există $\alpha > 0$ astfel încît $\alpha M \subseteq V(0, x; 1)$, adică $|\alpha f(x)| < 1$, $\forall f \in M$, deci M este punctual mărginită. Aplicînd principiul mărginirii uniforme, M rezultă mărginită.

23. Fie X reflexiv și $J_1 : X^* \to X^{***}$ izomorfismul natural. Oricare ar fi $x''' \in X^{***}$, $x \to x'''(Jx)$ este o funcțională mărginită pe X ($J : X \to X^{**}$ fiind izomorfismul natural). Deci există $x' \in X^*$ astfel încît $x'''(Jx) = x'(x)$, $\forall x \in X$. Deoarece $x'(x) = (Jx)(x')$, deducem $x'''(Jx) = (Jx)(x')$. Însă J este prin ipoteză surjectiv, deci egalitatea precedentă arată că $x''' = J_1 x'$, adică J_1 este, de asemenea, surjectiv. Invers, fie X reflexiv. Arătăm întîi că $J(X)$ este închis în X^{**}. În adevăr, dacă $x'' \in \overline{J(X)}$, fie $x_n \in X$ astfel încît $Jx_n \to x''$. Deoarece $\|Jx_n\| = \|x_n\|$, deducem că $\{x_n\}$ este șir Cauchy în X. Există deci $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, de unde $x'' = Jx$. Dacă presupunem acum $J(X) \neq X^{**}$, există $x'' \in X^{**}$, $x'' \notin J(X)$. Există atunci $x''' \in X^{***}$, astfel încît $x'''(x'') \neq 0$ și $x'''(u) = 0$, $\forall u \in J(X)$. Fie, conform ipotezei, $x' \in X$ astfel încît $x''' = J_1 x'$. Vom avea deci: $J_1 x'(x'') \neq 0$ și $J_1 x'(u) = 0$, $\forall u \in J(X)$. Ultima relație arată că $x'(x) = 0$, $\forall x \in X$, în timp ce prima arată că $x''(x') \neq 0$, contradicție.

24. Fie $y''\in Y^{**}$. Pentru fiecare $x'\in X^*$, $x'|_Y\in Y^*$, deci are sens $y''(x'|_Y)$. Deoarece: $|y''(x'|_Y)|\leqslant\|y''\|\,\|x'|_Y\|\leqslant\|y''\|\,\|x'\|$, rezultă că există $x''\in X^{**}$, astfel încît $x''(x')=y''(x'|_Y)$, $\forall x'\in X^*$. Datorită ipotezei, există $x\in X$ astfel încît $x''(x')=x'(x)$, deci $x'(x)=y''(x'|_Y)$. Conform teoremei lui Hahn-Banach, pentru fiecare $y'\in Y^*$, există $x'\in X^*$ astfel încît $y'=x'|_Y$. Deci mai rămîne să verificăm că $x\in Y$. Dacă am presupune $x\notin Y$, ar exista $y'\in X^*$ astfel încît $y'(x)\neq 0$ iar $y'(y)=0$, $\forall\, y\in Y$. Aplicînd egalitatea $x'(x)=y''(x'|_Y)$ unui $x'\in X^*$ cu proprietatea $x'|_Y=y'$, se ajunge la contradicție.

25. a) Fie $\{x_n'\}$ o mulțime densă în X^*. Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}$, fie $x_n\in X$ astfel încît $\|x_n\|=1$ iar $|x'(x_n)|\geqslant 1/2\,\|x_n'\|$. Fie X_1 înfășurătoarea liniară închisă a mulțimii $\{x_n\}$. Deoarece mulțimea combinațiilor liniare de $\{x_n\}$ cu coeficienți raționali formează o mulțime numărabilă și densă în X_1, este suficient să arătăm că $X_1=X$. Dacă ar exista $x_0\in X$ astfel încît $x_0\notin X_1$, atunci există și $x_0'\in X^*$ astfel încît $x_0'(x_0)\neq 0$ și $x_0'(x)=0$, $\forall\, x\in X_1$, iar $\|x_0'\|=1$. În particular, $x_0'(x_n)=0$, $\forall n\in\mathbf{N}$, deci: $1/2\|x_n'\|\leqslant|x_n'(x_n)|=|x_n'(x_n)-x_0'(x_n)|\leqslant\|x_n'-x_0'\|$, de unde $1=\|x_0'\|\leqslant\|x_0'-x_n'\|+\|x_n'\|\leqslant 3\,\|x_0'-x_n'\|$, $\forall\, n\in\mathbf{N}$, ceea ce contrazice faptul că $\{x_n'\}$ este o mulțime densă în X^*. b) Dacă X este reflexiv, este izometric cu X^{**}; dacă X este separabil, X^{**} va fi separabil. Cu punctul precedent, X^* rezultă separabil. c) Se știe (conform exercițiului V.27) că l^1 este separabil, iar $(l^1)^*\simeq m$ nu este separabil.

26. a) Fie $\{x_n\}$ o mulțime densă în X. Prin ipoteză, $\{f_n(x_1)\}$ este șir mărginit, deci conține un subșir convergent $\{f_{n_1}(x_1)\}$. Apoi șirul $\{f_{n_1}(x_2)\}$ este mărginit, deci conține un subșir convergent $\{f_{n_2}(x_2)\}$. Inductiv, putem alege un subșir $\{f_{n_k}\}$ al lui $\{f_{n_{k-1}}\}$ astfel încît $\{f_{n_k}(x_k)\}$ să fie convergent. Considerînd șirul diagonal $g_n=f_{n_n}$, avem un subșir al lui $\{f_n\}$ iar $\{g_n(x_k)\}$ este convergent, pentru fiecare $k\in\mathbf{N}$. Notînd M un număr pentru care $\|f_n\|\leqslant M$, $\forall\, n\in\mathbf{N}$, fie, pentru $\varepsilon>0$ și $x\in X$, x_k astfel încît $\|x-x_k\|<\varepsilon/3M$. Există $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ astfel încît, pentru $m,n\geqslant n_\varepsilon$, să avem $|g_n(x_k)-g_m(x_k)|<\varepsilon/3$. Urmează: $|g_n(x)-g_m(x)|\leqslant|g_m(x)-g_m(x_k)|+|g_m(x_k)-g_n(x_k)|+|g_n(x_k)-g_n(x)|\leqslant\|g_m\|\,\|x-x_k\|+\varepsilon/3+\|g_n\|\,\|x-x_k\|<\varepsilon$, ceea ce arată că $\{g_n(x)\}$ este convergent, pentru orice $x\in X$, deci $\{g_n\}$ este slab* convergent.

b) Dacă notăm X_1 subspațiul liniar închis generat de $\{x_n\}$, X_1 este separabil. Fiind închis în X, este și reflexiv (conform exercițiului 24). Din exercițiul 25 deducem că X_1^* este, de asemenea, separabil. Cu punctul precedent, $\{Jx_n\}$ conține un subșir slab convergent (care va fi notat tot $\{Jx_n\}$). Deci $Jx_n(x')$ converge, pentru orice $x'\in X_1^*$, adică $x'(x_n)$ converge, pentru orice $x'\in X_1^*$. Oricare ar fi $x'\in X^*$, avem $x'|X_1\in X_1^*$, deci $x'(x_n)=x'|_{X_1}(x_n)$ converge. Aceasta înseamnă că $\{x_n\}$ converge slab.

27. Se poate consulta [1].

28. a) Deoarece $(\Gamma^n)^*$ este de dimensiune algebrică finită, rezultă că $(\Gamma^n)^{**}$ are aceeași dimensiune algebrică. Izomorfismul natural $\Gamma^n\to(\Gamma^n)^{**}$ fiind injectiv, iar cele două spații avînd aceeași dimensiune, urmează că este și surjectiv. Se știe că, pentru orice $p\in(1,+\infty)$, $(l^p)^*$, respectiv $(L^p([0,1])^*$, se identifică cu l^q, respectiv $L^q([0,1])$, unde $p^{-1}+q^{-1}=1$. Deci $(l^p)^{**}$ se identifică cu $(l^q)^*$, adică cu l^p. Este ușor de văzut că această identificare este chiar izomorfismul natural. Analog, pentru $L^p([0,1])$. b) Deoarece $(c_0)^{**}$ se poate identifica cu m, deducem că c_0 nu este reflexiv: în adevăr c_0 este separabil, iar m nu este separabil (conform exercițiului V.27). Deoarece $(c_0)^*\simeq l^1$

(exercițiul 16), din exercițiul 23 deducem că l^1 nu poate fi reflexiv. Deoarece $(l^1)^* \simeq m$, același raționament arată că m nu poate fi reflexiv. De asemenea, $(c)^* \simeq l^1$ arată că c nu poate fi reflexiv. Exercițiul 9 arată că $\mathcal{C}([0, 1])$ nu este reflexiv. În sfîrșit, spațiul $L^1([0, 1])$ fiind separabil, iar $(L^1([0, 1]))^* \simeq M([0, 1])$ nefiind separabil, din exercițiul 25 rezultă că $L^1([0, 1])$ nu poate fi reflexiv.

29. Prin definiție, $T'(y')(x) = y'(Tx)$, $\forall x \in X$, $\forall y' \in Y^*$. În particular, $Tf_j^*(e_i) = f_j^*(Te_i)$. Înlocuind obținem: $Tf_j^*(e_i) = f_j^*(Te_i) = f_j\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} f_k\right) = \alpha_{ij}$. Fie atunci (b_{ji}) matricea lui T' în baza duală. Deci $Tf_j^* = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k$. În particular, $\alpha_{ij} = Tf_j^*(e_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k^*\right)(e_i) = b_{ji}$, ceea ce arată că matricea lui T' în baza duală este transpusa matricei lui T.

30. a) Să verificăm întîi că τ este bine definită, deci că $\tau(s) \in X^*$, $\forall s \in K$. Deoarece: $\tau(s)(\lambda x + \mu y) = T(\lambda x + \mu y)(s) = (\lambda Tx + \mu Ty)(s) = \lambda T(x)(s) + \mu T(y)(s) = \lambda\tau(s)(x) + \mu\tau(s)(y)$, urmează că $\tau(s)$ este liniară. Apoi: $|\tau(s)(x)| = |T(x)(s)| \leqslant \sup_{s \in K} |T(x)(s)| = \|Tx\| \leqslant \|T\| \|x\|$, deci $\tau(s)$ este continuă. Cu acestea, $\tau(s) \in X^*$, $\forall s \in K$. Să arătăm că τ este continuă în topologia slabă. Fie $s_0 \in K$ și fie $V(\tau(s_0), x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ o vecinătate a lui $\tau(s_0)$ în topologia slabă. Funcțiile $T(x_1), \ldots, T(x_n)$ fiind continue în s_0, există o vecinătate V a lui s_0 astfel încît, pentru orice $s \in V$, să avem $|T(x_i)(s) - T(x_i)(s_0)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, adică $|\tau(s)(x_i) - \tau(s_0)(x_i)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, ceea ce înseamnă că $\tau(s) \in V(\tau(s_0), x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$. În sfîrșit, avem: $\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{s \in K} |T(x)(s)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sup_{s \in K} |\tau(s)(x)| = \sup_{s \in K} \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\tau(s)(x)| = \sup_{s \in K} \|\tau(s)\|$. b) Prin formulele $(*)$ se definește o funcție $T(x) : K \to \Gamma$. Fie $s_0 \in K$ și $x \in X$ fixat. Deoarece τ este slab continuă în s_0, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui s_0 astfel încît, pentru orice $s \in V$, să avem $\tau(s) \in V(\tau(s_0), x; \varepsilon)$, adică $|\tau(s)(x) - \tau(s_0)(x)| < \varepsilon$, ceea ce se scrie: $|T(x)(s) - T(x)(s_0)| < \varepsilon$. Deci Tx este funcție continuă; $Tx \in \mathcal{C}(K)$ și T este bine definit. Apoi: $T(\lambda x + \mu y)(s) = \tau(s)(\lambda x + \mu y) = \lambda\tau(s)(x) + \mu\tau(s)(y) = \lambda T(x)(s) + \mu T(y)(s)$ și T rezultă liniar. În sfîrșit, K fiind compact, iar τ slab continuu, mulțimea $\{\tau(s) \mid s \in K\}$ rezultă slab mărginită, deci, cu exercițiul 22, tare mărginită. Deci $\sup_{s \in K} \|\tau(s)\| < +\infty$, și putem scrie: $\|Tx\| = \sup_{s \in K} |\tau(s)(x)| \leqslant \sup_{s \in K} \|\tau(s)\| \|x\|$, ceea ce arată că T este continuu.

31. Fie $T : X \to \mathcal{C}(K)$ operator compact. Să arătăm că τ este continuu în normă. Fie $B = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$; deci $\overline{T(B)}$ este o mulțime compactă în $\mathcal{C}(K)$. În particular, $\overline{T(B)}$ este echicontinuă în $s_0 \in K$, deci, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui s_0 astfel încît, pentru orice $s \in V$ și orice $x \in B$, să avem $|T(x)(s) - T(x)(s_0)| < \varepsilon$ sau: $|\tau(s)(x) - \tau(s_0)(x)| < \varepsilon$, adică: $\|\tau(s) - \tau(s_0)\| \leqslant \varepsilon$, ceea ce dovedește continuitatea lui τ. Reciproc, să presupunem τ continuu în normă și să arătăm că T este compact. Cu notațiile de mai sus, avem de arătat că $T(B)$ este mulțime relativ compactă în $\mathcal{C}(K)$. Este suficient să arătăm că $T(B)$ este egal mărginită și echicontinuă. În demonstrația exercițiului 30 s-a observat că $\{\tau(s) \mid s \in K\}$ este o mulțime

mărginită, adică $\sup_{s\in K} \| \tau(s) \| < +\infty$. Însă: $\sup_{\|x\|\leqslant 1} \| Tx \| \leqslant \sup_{s\in K} \| \tau(s) \|$, ceea ce dovedește că $T(B)$ este mulțime mărginită. Fie acum $s_0 \in K$ și $\varepsilon > 0$. Există o vecinătate V a lui s_0 astfel încît $\| \tau(s) - \tau(s_0) \| < \varepsilon$, $\forall s \in V$, ceea ce arată că: $| T(x)(s) - T(x)(s_0) | = | \tau(s)(x) - \tau(s_0)(x) | \leqslant \| \tau(s) - \tau(s_0) \| < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in B$, dovedind astfel că $T(B)$ este o familie echicontinuă.

32. Să notăm $B = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$ și $B' = \{y' \in Y^* \mid \| y' \| \leqslant 1\}$. Dacă presupunem T compact, să considerăm $y'_n \in B'$ un șir oarecare. Fie $f_n : \overline{T(B)} \to \Gamma$ prin $f_n(y) = y'_n(y)$. Din $| f_n(y) - f_n(z) | = | y'_n(y - z) | \leqslant \| y - z \|$ rezultă că $\{f_n\}$ este o familie echicontinuă pe compactul $\overline{T(B)}$. În plus, $| f_n(y) | \leqslant \| y \| \leqslant \| T \|$ arată că familia considerată este egal mărginită. Din teorema lui Arzela-Ascoli există un subșir $\{f_{n_k}\}$ uniform convergent pe $\overline{T(B)}$. Rezultă că $y'_{n_k}(Tx) = (T'y'_{n_k})(x)$ converge uniform în $x \in B$, adică $\{T'y'_{n_k}\}$ este un subșir convergent în X^*, ceea ce arată că T' este compact. Reciproc, să presupunem că T' este compact. Din cele de mai sus, $T'' : X^{**} \to Y^{**}$ este compact, Notînd $B'' = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$, $T''(B'') \subseteq Y^{**}$ este relativ compact. Deci $T(B) \subseteq T''(B'')$ este relativ compact în Y^{**}. Deoarece $T(B) \subseteq Y$, deducem că $T(B)$ este relativ compact în Y, deci că T este compact.

33. a) Deoarece $| f(x) | = p_f(x)$, rezultă că orice $f \in X^*$ este continuă în topologia slabă. Reciproc, dacă τ este o topologie pe X, în care orice $f \in X^*$ este continuă, atunci, pentru fiecare $x_0 \in X$, mulțimile: $f^{-1}(\{\lambda \in \Gamma \mid | \lambda - f(x_0) | < \varepsilon\}) = \{x \in X \mid | f(x - x_0) | < \varepsilon\}$ sînt vecinătăți pentru x_0. Ținînd seama că $| f(x - x_0) | = p_f(x - x_0)$, mulțimile de mai sus sînt sferele $S(x_0, f; \varepsilon)$. Deoarece intersecțiile finite de astfel de sfere formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x_0 în topologia slabă, urmează că τ este mai fină ca topologia slabă. b) Necesitatea condiției este clară. Să presupunem deci că $f \circ \varphi : T \to \Gamma$ este continuu, oricare ar fi $f \in X^*$, și să arătăm că $\varphi : T \to X$ este slab continuă. Fie $t_0 \in T$ și fie V o vecinătate slabă pentru $\varphi(t_0)$. Există deci $f_1, ..., f_n$ și $\varepsilon > 0$ astfel încît $V(\varphi(t_0), f_1, ..., f_n; \varepsilon) \subseteq V$. Funcțiile $f_1 \circ \varphi, ..., f_n \circ \varphi$ fiind continue în t_0, există o vecinătate W a lui t_0 astfel încît, pentru orice $t \in W$, să avem $| f_i(\varphi(t)) - f_i(\varphi(t_0)) | < \varepsilon$, $i = 1, .., n$, adică $\varphi(t) \in V(\varphi(t_0), f_1, ..., f_n; \varepsilon) \subseteq V$, $\forall t \in W$, dovedind astfel continuitatea slabă a lui φ. c) Topologia slab* pe X^* este topologia cea mai puțin fină pentru care toate funcțiile $f_x : X^* \to \Gamma$ definite, pentru $x \in X$, prin $f_x(x^*) = x^*(x)$, sînt continue. În adevăr, orice asemenea funcție este slab* continuă, deoarece $| f_x(x^*) | = p_x(x^*)$. Reciproc, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, $x_0^* \in X^*$ și $x \in X$, avem: $f_x^{-1}(\{\lambda \in \Gamma \mid | \lambda - f_x(x_0) | < \varepsilon\}) = S(x_0, x; \varepsilon)$, ceea ce dovedește coincidența celor două topologii. Fie T un spațiu topologic oarecare iar $\varphi : T \to X^*$ o funcție oarecare. φ este slab* continuă dacă și numai dacă, oricare ar fi $x \in X$, $f_x \circ \varphi : T \to \Gamma$ este continuă. Necesitatea este evidentă. Să presupunem deci că $f_x \circ \varphi$ este continuă pentru orice $x \in X$. Fie $t_0 \in T$ și V o vecinătate slab* a lui $\varphi(t_0)$. Există deci $x_1, ..., x_n \in X$ și $\varepsilon > 0$ astfel încît $V(\varphi(t_0), x_1, ..., x_n; \varepsilon) \subseteq V$. Funcțiile $f_{x_1} \circ \varphi, ..., f_{x_n} \circ \varphi$ fiind continue în t_0, există W vecinătate a lui t_0, astfel încît, pentru orice $t \in W$, să avem: $| f_{x_i}(\varphi(t)) - f_{x_i}(\varphi(t_0)) | < \varepsilon$, $i = 1, ..., n$, adică: $| \varphi(t)(x_i) - \varphi(t_0)(x_i) | < \varepsilon$, $i = 1, ..., n$, ceea ce arată că $\varphi(t) \in V(\varphi(t_0), x_1, ..., x_n; \varepsilon) \subseteq V$, dovedind astfel că φ este slab* continuă.

34. Avînd în vedere că avem de arătat continuitatea unei aplicații liniare între două spații local convexe, este suficient să observăm că, oricare ar fi $y' \in Y^*$, avem: $q_{y'}(Tx) = | Tx(y') | = | (T'y')(x) | = p_{T'(y')}(x)$, oricare ar fi $x \in X$.

35. Dacă X este reflexiv, conform exercițiului 26, $\{x_n\}$ conține un subșir slab convergent $\{x_{n_k}\}$. Conform exercițiului 34, T este slab continuu, deci $\{Tx_{n_k}\}$ este subșir slab convergent. Dacă Y este reflexiv, $\{Tx_n\}$ conține un subșir slab convergent, fiind mărginit (conform exercițiului 26).

36. a) Conform exercițiului 6, B este mulțime slab compactă. Conform exercițiului 34, $T(B)$ este slab compact în Y. În particular, $T(B)$ este slab închis; fiind și convex, cu exercițiul 7, rezultă că $T(B)$ este închis în Y.

b) Dacă $B_1 = \{x \in X_1 \mid \| x \| \leqslant 1\}$ atunci $Tx \in \overline{T_1(B_1)}$, oricare ar fi $x \in X$, cu $\| x \| \leqslant 1$, prin construcție. Dar $\overline{T_1(B_1)} = T_1(B_1)$ din cele de mai sus. Deducem că $T(X) \subseteq T_1(X_1)$; incluziunea inversă este evidentă.

37. a) Avem: $p_x(\lambda T) = \| (\lambda T)(x) \| = |\lambda| p_x(T)$; $p_x(T_1 + T_2) = \| (T_1 + T_2)(x) \| \leqslant p_x(T_1) + p_x(T_2)$, deci p_x este seminormă. Dacă $p_x(T) = 0$, $\forall x \in X$, atunci $Tx = 0$, $\forall x \in X$, adică $T = 0$. Deci familia $\{p_x\}_{x \in X}$ este suficientă.

b) Un sistem fundamental de vecinătăți ale originii în topologia convergenței punctuale este $W(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)\}$, unde: $W(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{T \in L(X, Y) \mid \| Tx_i \| \leqslant \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n\}$.

c) $T_n \to T$ în topologia convergenței punctuale dacă și numai dacă $p_x(T_n - T) \to 0$, $\forall x \in X$; deci dacă și numai dacă $\| (T_n - T)(x) \| \to 0$, $\forall x \in X$, deci dacă și numai dacă $T_n x \to Tx$, $\forall x \in X$.

38. a) Avem: $q_{x, y^*}(\lambda T) = |y^*(\lambda T x)| = |\lambda| q_{x, y^*}(T)$ și $q_{x, y^*}(T_1 + T_2) = |y^*((T_1 + T_2)(x))| \leqslant q_{x, y^*}(T_1) + q_{x, y^*}(T_2)$, deci q_{x, y^*} este o seminormă. Dacă $q_{x, y^*}(T) = 0$, pentru orice $x \in X$ și $y^* \in Y^*$, urmează $y^*(Tx) = 0$, $\forall y^* \in Y^*$, deci $Tx = 0$, $\forall x \in X$, adică $T = 0$, ceea ce arată că familia $\{q_{x, y^*}\}_{x \in X, \, y^* \in Y^*}$ este suficientă.

b) Un sistem fundamental de vecinătăți ale originii în topologia convergenței slabe este $Z(x_1, \ldots, x_n, y_1^*, \ldots, y_m^*; \varepsilon)$ unde $Z(x_1, \ldots, x_n, y_1^*, \ldots, y_m^*; \varepsilon) = \{T \in L(X, Y) \mid |y_i(Tx_j)| < \varepsilon, \ i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}\}$.

c) $T_n \to T$ în topologia convergenței slabe dacă și numai dacă $q_{x, y^*}(T_n - T) \to 0$, $\forall x \in X$, $y^* \in Y^*$, ceea ce este echivalent cu $y^*(T_n - T)(x) \to 0$, $\forall x \in X$, $y^* \in Y^*$.

39. a) Cînd Y are topologia normei, un sistem fundamental de vecinătăți în topologia produs pe Y^X este format din mulțimile $\prod_{x \in X} V_x$, unde $V_x = Y$ dacă $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, iar $V_{x_i} = \{y \in Y \mid \| y \| < \varepsilon\}$ pentru $i = \overline{1, n}$. Evident $L(X, Y) \cap \prod_{x \in X} V_x = W(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$, cu notațiile de la exercițiul 37, ceea ce demonstrează coincidența celor două topologii.

b) Cînd Y are topologia slabă, un sistem fundamental de vecinătăți ale originii în topologia produs pe Y^X este format din mulțimile $\prod_{x \in X} V_x$, unde $V_x = Y$ dacă $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, iar V_{x_i} sînt vecinătăți slabe, pentru $i = 1, \ldots, n$. Există deci $y_1^*, \ldots, y_m^* \in Y^*$ astfel încît $V_{x_i} = V(y_1^*, \ldots, y_m^*; \varepsilon)$, ceea ce arată că: $L(X, Y) \cap \prod_{x \in X} V_x = Z(x_1, \ldots, x_n, y_1^*, \ldots, y_m^*; \varepsilon)$, cu notațiile de la exercițiul 38. Deci cele două topologii coincid.

c) Dacă $Y = \Gamma$ atunci topologia normei și topologia slabă coincid pe Y; afirmația rezultă acum direct din exercițiul 5.

d) Deoarece topologia slabă pe Y este mai puțin fină decît topologia normei, aceeași relație se păstrează și între topologiile produs pe Y^X.

e) Afirmația rezultă din incluziunea: $\{T \in L(X, Y) \mid \| T \| < \delta\} \subseteq W(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$, unde $\delta = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\varepsilon / \| x_i \|\}$.

40. $(i) \Rightarrow (ii)$ $x \to \Phi_2(Tx, y)$ este continuă, fiind compusa a două aplicații continue. $(ii) \Rightarrow (i)$ Fie $x_0 \in X_1$ și $V(Tx_0, y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$ o vecinătate pentru Tx_0, deci $y_1, \ldots, y_n \in Y_2$. Fie W o vecinătate pentru x_0 astfel încît, pentru orice $x \in W$, să avem: $| \Phi_2(Tx, y_i) - \Phi_2(Tx_0, y_i) | < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. O asemenea vecinătate există datorită continuității aplicațiilor $x \to \Phi_2(Tx, y_i)$. Oricare ar fi $x \in W$, avem atunci $p_{y_i}(Tx - Tx_0) < \varepsilon$, adică $Tx \in V(Tx_0, y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$, ceea ce dovedește continuitatea aplicației T. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Pentru fiecare $y \in Y_2$ aplicația $x \to \Phi_2(Tx, y)$ fiind liniară și continuă pe X_1, definește, conform exercițiului 1, un element unic determinat $T'y \in Y_1$ astfel încît $\Phi_2(Tx, y) = \Phi_1(x, T'y)$. Datorită unicității și faptului că Φ_1 și Φ_2 sînt biliniare, deducem că T este liniar. $(iii) \Rightarrow (ii)$. Pentru fiecare $y \in Y_2$, $x \to \Phi_2(Tx, y) = \Phi_1(x, T'y)$ este continuă, deoarece Φ_1 este continuă în prima variabilă. Dacă are loc (iii), deducem imediat că $(T')' = T$. Deoarece există $(T')'$, din $(iii) \Rightarrow (i)$ deducem continuitatea lui T.

41. Avem: $y'(T(x + y)) = (Sy')(x + y) = (Sy')(x) + (Sy')(y) = y'(Tx) + y'(Ty) = y'(Tx + Ty)$. Egalitatea avînd loc pentru orice $y' \in Y$, deducem $T(x + y) = Tx + Ty$. Analog, $y'(\lambda Tx) = \lambda y'(Tx) = \lambda(Sy')(x) = (Sy')(\lambda x) = y'(T(\lambda x))$, deci $\lambda Tx = T(\lambda x)$. Apoi: $S(\lambda y' + \mu y_1')(x) = (\lambda y' + \mu y_1')(Tx) = \lambda y'(Tx) + \mu y_1'(Tx) = \lambda S(y')(x) + \mu S(y_1')(x)$, $\forall x \in X$, adică: $S(\lambda y' + \mu y_1') = \lambda S(y') + \mu S(y_1')$, deci S este liniar. În sfîrșit, egalitatea $y'(Tx) = (Sy')(x)$ arată că mulțimea $\{Tx \mid \| x \| \leqslant 1\}$ este slab mărginită în Y; este deci mărginită și T rezultă continuu. Acum egalitatea din enunț afirmă că $S = T'$, deci S este continuu.

42. Mulțimea $B = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$ este mărginită, deci slab mărginită. T fiind slab continuu, $T(B)$ este slab mărginită în Y. Cu exercițiul 21, $T(B)$ este mărginită. T rezultă continuu.

43. Fie $f \in (\Gamma^n)^*$, deci $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Avem: $\| f \|_1 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right| \Big| \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leqslant 1 \right\}$, iar: $\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$, deci $\| f \|_1 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}$. Alegînd $x_i = \overline{\alpha}_i \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{-1/2}$, avem: $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}$, deci $\| f \|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2}$. Apoi $\| f \|_2 = \sup \{ |f(x)| \mid \| x \|_2 \leqslant 1 \} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right| \Big| \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant 1 \right\}$. Avem $\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| \sum_{i=1}^n |x_i|$, deci $\| f \|_2 \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$. Alegînd $x_{i_0} = \alpha_{i_0} |\alpha_{i_0}|^{-1}$ și $x_i = 0$, pentru $i \neq i_0$ (unde i_0 este astfel încît $|\alpha_{i_0}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$), obținem: $\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right| = |\alpha_{i_0}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$, deci $\| f \|_2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$. În sfîrșit: $\| f \|_3 = \sup \{ |f(x)| \mid \| x \|_3 \leqslant 1 \} =$

$= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right| \;\middle|\; \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \leqslant 1\right\}$. Deoarece $\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant}|x_i|\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, deducem: $\|f\|_3 \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$. Fie $x_i = \alpha_i|\alpha_i|^{-1}$ dacă $\alpha_i \neq 0$ și $x_i = 0$ în rest. Avem: $\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, ceea ce arată că $\|f\|_3 = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$.

VIII. SPAȚII HILBERT

1. Aplicația este corect definită, suma din membrul doi fiind întotdeauna finită. Apoi: $\langle x, x\rangle = \sum_{i\in I}|\lambda_i|^2 \geqslant 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0,\ \forall i\in I \Leftrightarrow x = 0$; $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\lambda_i\overline{\mu_i} = \overline{\sum_{i\in I}\mu_i\overline{\lambda_i}} = \overline{\langle y, x\rangle}$; $\langle x+x', y\rangle = \sum_{i\in I}(\lambda_i+\lambda_i')\overline{\mu_i} = \sum_{i\in I}\lambda_i\overline{\mu_i} + \sum_{i\in I}\lambda_i'\overline{\mu_i} = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$, (unde $x' = \sum_{i\in I}\lambda_i' e_i$); $\langle \lambda x, y\rangle = \sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i)\overline{\mu_i} = \lambda\sum_{i\in I}\lambda_i\overline{\mu_i} = \lambda\langle x, y\rangle$, ceea ce demonstrează că s-a definit un produs scalar. Fie $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i\in I}|\lambda_i|^2\right)^{1/2}$ norma indusă de acest produs scalar, iar $p(x) = \sum_{i\in I}|\lambda_i|$ norma considerată în exercițiul II.2. Avem, evident, $\|x\| \leqslant p(x)$. Se știe că, dacă X este finit dimensional, cele două norme sînt echivalente. Dacă X nu este finit dimensional, să presupunem că cele două norme ar fi echivalente. Ar exista deci $m > 0$ astfel încît $mp(x) \leqslant \|x\|$, $\forall x\in X$. Fie $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ o parte numărabilă din $\mathcal{B}$ și să definim: $x_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$. Avem: $p(x_n) = n$, iar $\|x_n\| = n^{1/2}$. Ar urma $m \leqslant n^{1/2}, \forall n\in\mathbf{N}$, adică $m = 0$, contradicție: cele două norme nu sînt echivalente.

2. a) Avem: $\langle x, x\rangle = |f(x)|^2 \geqslant 0$; $\langle 0, 0\rangle = |f(0)|^2 = 0$; $\langle x, y\rangle = f(x)\overline{f(y)} = f(y)\overline{f(x)} = \overline{\langle y, x\rangle}$; $\langle x+x', y\rangle = f(x+x')\overline{f(y)} = f(x)\overline{f(y)} + f(x')\overline{f(y)} = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$; $\langle \lambda x, y\rangle = f(\lambda x)\overline{f(y)} = \lambda f(x)\overline{f(y)} = \lambda\langle x, y\rangle$, deci sînt îndeplinite toate proprietățile produsului scalar, cu excepția posibilă a proprietății: $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

b) Aplicația definită este produs scalar dacă și numai dacă $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$, adică dacă și numai dacă $|f(x)|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, sau, echivalent, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Deoarece $\operatorname{Ker} f$ este de codimensiune 1, relația precedentă are loc dacă și numai dacă X este de dimensiune 1.

3. Să presupunem, că $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$. Notînd $\lambda = -\langle x, y\rangle\|y\|^{-2}$, dacă $y \neq 0$, putem scrie: $0 = -(|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2)\|y\|^{-2} = |\lambda|^2\|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \|x\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$, de unde rezultă că x și y sînt liniar dependenți. Reciproc, fie x, y liniar dependenți; egalitatea fiind evidentă dacă $y = 0$, să presupunem $y \neq 0$; deci există $\lambda\in\Gamma$ astfel încît $x = \lambda y$. Deducem: $|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda|\|y\|^2 = \|\lambda y\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\|$.

4. a) $1 \Rightarrow 2$. Este teorema lui Pitagora. $2 \Rightarrow 1$. Avem: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$; $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$, deci, folosind ipoteza: $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle = 0$, adică $\langle x, y\rangle = 0$. $1 \Rightarrow 3$. Avem: $\|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\,\|y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2\,\|y\|^2 \geqslant \|x\|^2$. $3 \Rightarrow 1$. Dacă $\lambda \in \mathbf{R}$, relația $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$ implică: $2\lambda\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0$. Pentru $\lambda > 0$ deducem $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \geqslant -1/2\,\lambda y^2$, deci, făcînd $\lambda \to 0$, obținem $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \geqslant 0$. Pentru $\lambda < 0$, obținem $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leqslant -1/2\,\lambda y^2$, deci $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leqslant 0$. Scriind acum relația pentru $\lambda = i\mu$, cu $\mu \in \mathbf{R}$, și raționînd ca mai sus, se obține $\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle = 0$, adică $\langle x, y\rangle = 0$. $1 \Rightarrow 4$. Avem: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x-y\|^2$. Analog pentru a doua relație. $4 \Rightarrow 1$. Dacă $\|x+y\| = \|x-y\|$, urmează $2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = 0$. Dacă $\|x+iy\| = \|x-iy\|$, urmează $2\,\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle = 0$, adică $\langle x, y\rangle = 0$.

b) Dacă X este spațiu prehilbertian real, 2), 3), 4) trebuie înlocuite respectiv cu: 2') $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; 3') $\|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$; 4') $\|x+y\| = \|x-y\|$.

c) $1 \Leftrightarrow 2$ devine: „Un triunghi ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$"; $1 \Leftrightarrow 3$ devine: „Perpendiculara este mai scurtă decît orice oblică"; $1 \Leftrightarrow 4$ devine: „Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă are diagonalele egale" conform figurii 10, de la pagina 90.

5. Necesitatea condiției este cunoscută. Să presupunem deci că $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ și să notăm: $\langle x, y\rangle_1 = 1/4\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$. Avem $\langle x, x\rangle_1 = \|x\|^2$, deci $\langle x, x\rangle_1 \geqslant 0$ și $\langle x, x\rangle_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Apoi: $\langle x, y\rangle_1 = \langle y, x\rangle_1$ evident. Avem: $\langle x+x', y\rangle_1 + \langle x-x', y\rangle_1 = 1/4\,(\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'-y\|^2 + \|x-x'+y\|^2 - \|x-x'-y\|^2) = 1/4\,((\|x+y+x'\|^2 + \|x+y-x'\|^2) - (\|x-y+x'\|^2 + \|x-y-x\|^2)) = 1/4\,(2(\|x+y\|^2 + \|x'\|^2) - 2(\|x-y\|^2 + \|x'\|^2)) = 1/2\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = 2\langle x, y\rangle_1$. Dacă luăm $x' = x$, se obține: $\langle 2x, y\rangle_1 = 2\langle x, y\rangle_1$, deci egalitatea de mai sus devine: $\langle x+x', y\rangle_1 + \langle x-x', y\rangle_1 = \langle 2x, y\rangle_1$. Fie $x = 1/2\,(u+v)$, $x' = 1/2\,(u-v)$. Atunci găsim: $\langle u+v, y\rangle_1 = \langle u, y\rangle_1 + \langle v, y\rangle_1$. Aplicația $x \to \langle x, y\rangle_1$ fiind aditivă și continuă, deducem că: $\langle \lambda x, y\rangle_1 = \lambda\langle x, y\rangle_1$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Să verificăm acum că: $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_1 + i\,\langle x, iy\rangle_1$ este un produs scalar pe X, care induce norma dată. Deoarece $\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle_1$, rezultă că $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ și $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Apoi: $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_1 + i\langle x, iy\rangle_1 = \langle y, x\rangle_1 + i\,\langle iy, x\rangle_1 = \langle y, x\rangle - i\,\langle y, ix\rangle_1 = \overline{\langle y, x\rangle}$; iar: $\langle x+x', y\rangle = \langle x+x', y\rangle_1 + i\,\langle x+x', iy\rangle_1 = \langle x, y\rangle_1 + \langle x', y\rangle_1 + i\langle x, iy\rangle_1 + i\,\langle x', iy\rangle_1 = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$. Dacă $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci: $\langle \lambda x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle_1 + i\langle \lambda x, iy\rangle_1 = \lambda\langle x, y\rangle$. Avînd în vedere cele de mai sus, mai rămîne să arătăm că $\langle ix, y\rangle = i\langle x, y\rangle$. Însă: $\langle ix, y\rangle = \langle ix, y\rangle_1 + i\langle ix, iy\rangle_1 = -\langle x, iy\rangle_1 + i\langle x, y\rangle_1 = i\,(\langle x, y\rangle_1 + i\,\langle x, iy\rangle_1) = i\langle x, y\rangle$.

Observație: Demonstrația de mai sus este dată în ipoteza că X este spațiu liniar complex. Dacă X este real, este suficient să luăm ca produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$.

6. a) Avem: $r(x, y) \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{-1} = 1 + 2\|x\|\,\|y\| \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{-1} \leqslant 2$ și $M \geqslant r(x, 0) = 1/2\,(\|x\|^2 + \|x\|^2)\,\|x\|^{-2} = 1$, ceea ce arată că $1 \leqslant M \leqslant 2$. În plus, după cum se verifică ușor: $r(x+y, x-y)\,r(x, y) = 1$, deci $Mm = 1$.

b) Aplicația $p \to \|(x, y)\|_p$ este evident continuă pe $[1, +\infty]$. Deoarece $\|(x, y)\|_\infty \leqslant \|(x, y)\|_p \leqslant 2^{1/p}\|(x, y)\|_\infty$, deducem continuitatea și în ∞.

Urmează că $p \to r_p(x, y)$ este, de asemenea, continuă. Din modul cum sînt definite, $p \to M_p$, respectiv $p \to m_p$, rezultă inferior, respectiv superior semicontinue. Dar $M_p = (m_p)^{-1}$, ceea ce arată că $p \to M_p$ este o funcție continuă pe $[1 + \infty)$. Este acum suficient să observăm că $M_1 = M_\infty = 2$, în timp ce $M_2 = 1$.

7. Deoarece $\{f_1, ..., f_n\}$ este bază ortonormală în X_0, rezultă că: $e_i = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, f_j \rangle f_j$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Deci $\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, f_j \rangle f_j \rangle$. $\sum_{k=1}^{n} \langle e_i, f_k \rangle f_k = \sum_{i,j,k=1}^{n} \overline{\langle e_i, f_j \rangle} \langle x, f_j \rangle \langle e_i, f_k \rangle f_k = \sum_{j,k=1}^{n} \langle x, f_j \rangle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle f_j, e_i \rangle \langle e_i, f_k \rangle \right) f_k =$ $= \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k$ (s-a folosit: $\sum_{i=1}^{n} \langle f_j, e_i \rangle \langle e_i, f_k \rangle = \delta_{jk}$, deoarece avem baze ortonormale). O demonstrație directă a egalității precedente rezultă din observația că ambii membri reprezintă elementul de cea mai bună aproximare pentru x, în X_0.

8. a) Avem: $G(y_1, ..., y_n) = \det (\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{lk} x_k \rangle)_{i,l}$. Însă: $\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{lk}, x_k \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{ij}\ \overline{\alpha}_{lk} \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{ij} \langle x_j, x_k \rangle\ \overline{\alpha}_{lk}$. Notînd D_1 matricea $(\langle y_i, y_j \rangle)$ și D_2 matricea $(\langle x_i, x_j \rangle)$, relația de mai sus arată că: $D_1 = A \cdot D_2 \cdot {}^tA$, unde ${}^tA = (\overline{\alpha}_{ji})$. Trecînd la determinanți: $G(y_1, ..., y_n) = \det A \cdot G(x_1, ..., x_n)$. $\overline{\det A} = |\det A|^2\ G\ (x_1, ..., x_n)$.

b) Fie $X_0 = \mathcal{L}(\{x_1, ..., x_n\})$ și fie $\{e_1, ..., e_m\}$ o bază ortonormală în X_0. Avem, evident, $m \leqslant n$. Dacă $m < n$, convenim să notăm $e_{m+p} = 0$. Deoarece avem o bază, rezultă că există matricea $A = (\alpha_{ij})$ astfel încît: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $\forall i = 1, ..., n$. Din cele de mai sus: $G(x_1, ..., x_n) = |\det A|^2 G\ (e_1, ..., e_n)$; iar $G\ (e_1, ..., e_n) = 1$ dacă $m = n$ și egal cu 0 dacă $m < n$. Deci $G\ (x_1, ..., x_n) \geqslant$ $\geqslant 0$ și $G\ (x_1, ..., x_n) = 0$ dacă și numai dacă $\{x_1, ..., x_n\}$ este o mulțime liniară dependentă.

c) Fie X_0 ca mai sus, iar $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază ortonormală în X_0. După cum se știe: $d(x, X_0) = (\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2)^{1/2}$. Dacă notăm $A = (\alpha_{ij})$ matricea pentru care: $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ e_{ij}$, atunci trecerea de la $\{x, x_1, ..., x_n\}$ la $\{x, e_1, ..., e_n\}$ se realizează cu ajutorul matricei $B = (\beta_{ij})$ de tip $(n + 1) \times (n + 1)$, în care $\beta_{11} = 1$; $\beta_{1i} = \beta_{i1} = 0$, $\forall i = 2, ..., n, n + 1$, iar $\beta_{ij} = \alpha_{i-1, j-1}$ pentru $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$. Deci:

$$\frac{G(x, x_1, ..., x_n)}{G(x_1, ..., x_n)} = \frac{|\det B|^2\ G(x, e_1, ..., e_n)}{|\det A|^2\ G(e_1, ..., e_n)} = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

9. Mulțimea $\{e_n\}$ este ortonormală. Dacă $n \neq m$ avem: $\langle e_n, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} e_n^k \overline{e_m^k} = 0$; iar $\langle e_n, e_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |e_n^k|^2 = 1$. Să verificăm că mulțimea $\{e_n\}$ este

maximală. Presupunînd prin absurd că n-ar fi maximală, fie B o mulțime ortonormală, astfel încît $e_n \in B$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și există $x \in B$, astfel încît $x \neq e_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Urmează $\langle x, e_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, adică, dacă $x = (x_k)$; $0 = \langle x, e_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_n^k =$ $= x_n$. Deci $x = 0$, în contradicție cu $\| x \| = 1$. Să verificăm acum că $\{e_n\}$ este o mulțime totală. Fie deci $x \in l^2$ astfel încît $\langle x, e_n \rangle = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$. A fost arătat mai sus că $x = 0$. Să verificăm acum că, pentru fiecare $x \in l^2$, avem $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$. Cu calculul făcut mai sus, $\sum_{n=1}^{p} \langle x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{p} x_n e_n = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_p, 0, \ldots)$ deci: $x - \sum_{n=1}^{p} \langle x, e_n \rangle e_n = (0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots)$, de unde: $\| x -$ $- \sum_{n=1}^{p} \langle x, e_n \rangle e_n \| = \| (0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots) \| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_{p+n} |^2 \right)^{1/2}$. Deoarece $x \in l^2$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2$ este convergentă, deci $\lim_{p \to \infty} | x_{p+n} |^2 = 0$, ceea ce arată că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ este convergentă în l^2 și are ca sumă x. Cu aceasta, s-a verificat și faptul că $X = \overline{\mathcal{T}(\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\})}$. În adevăr, $\sum_{n=1}^{p} \langle x, e_n \rangle e_n$ este din $\mathcal{T}(\{e_1, \ldots$ $\ldots, e_n, \ldots\})$, de unde: $x = \lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{p} \langle x, e_n \rangle e_n$ aparține spațiului $\overline{\mathcal{T}(\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\})}$. Să mai verificăm identitatea lui Parseval, deci că, pentru orice $x \in l^2$, avem: $\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle x, e_n \rangle |^2$. Însă: $\langle x, e_n \rangle = x_n$, deci egalitatea de mai sus nu este altceva decît definiția normei în l^2.

10. Fie $x^k = (x_n^k) \in K$ un șir oarecare. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ fixat, șirul numeric $\{x_n^k\}$ este mărginit, căci $| x_n^k | \leqslant n^{-1}$, $\forall k \in \mathbf{N}$. Deci șirul $\{x_1^k\}$ are un subșir convergent; fie $\{x_1^{k_2 m}\}$ acest subșir, iar x_1 limita sa. Șirul $\{x_2^{k_1 m}\}$ are un subșir convergent, fie $\{x_2^{k_2 m}\}$ acest subșir, iar x_2 limita sa. Prin recurență, șirul $\{x_p^{k_{(p-1)m}}\}$ are un subșir convergent, fie $\{x_p^{k_p m}\}$ acest subșir, iar x_p limita sa. Considerînd șirul diagonal $\{x_n^{k_n n}\}$, vom arăta că acest șir converge la $x = (x_n)$ în l^2. Avem, prin construcție $| x_n | \leqslant n^{-1}$, ceea ce arată că $x \in K$. Deoarece $\sum_{p=1}^{\infty} | x_p^{k_n n} - x_p |^2 \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2p^{-2} < \infty$, rezultă că seria $\sum_{p=1}^{\infty} | x_p^{k_n n} - x_p |^2$ este convergentă. Fie $\varepsilon > 0$ și p_0 astfel încît $\sum_{p=p_0+1}^{\infty} | x_p^{k_n n} - x_p |^2 < 1/2\, \varepsilon$. Datorită majorării precedente, p_0 poate fi ales același, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$. Deoarece $\{x_p^{k_n n}\}$ este subșir în $\{x_p^{k_p n}\}$ pentru orice p, rezultă că $\{x_p^{k_n n}\}$ converge la x_p. Există deci $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încît, pentru orice $n \geqslant n_0$ și pentru $p = 1, \ldots, p_0$, să avem: $| x_p^{k_n n} - x_p |^2 < \varepsilon / 2 p_0$, deci concluzia.

11. Deoarece $\| x + y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) - \| x - y \|^2$, dacă presupunem că $\| x \| = 1$, $\| y \| = 1$ și $\| x - y \| > \varepsilon$, urmează $\| x + y \|^2 < 4 - \varepsilon^2$. Din continuitatea funcției radical, rezultă că există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît: $\| x + y \| < 2 - \delta(\varepsilon)$.

12. Să notăm, pentru $(x_i), (y_i) \in \bigoplus_{i \in I} X_i$: $\langle (x_i), (y_i) \rangle = \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle$. Deoarece, pentru orice parte finită $J \subseteq I$, avem:

$$\left| \sum_{j \in J} \langle x_j, y_j \rangle \right| \leqslant \sum_{j \in J} |\langle x_j, y_j \rangle| \leqslant \left(\sum_{j \in J} \| x_j \| \, \| y_j \|\right) \leqslant \left(\sum_{j \in J} \| x_j \|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j \in J} \| y_j \|^2\right)^{1/2},$$

urmează că definiția este corectă. Se verifică acum fără nici o dificultate că s-a definit un produs scalar, care induce norma considerată.

13. Să arătăm că $\bigoplus_{i \in I} X_i$ este complet. Fie deci $x_n = (x_i^n) \in \bigoplus_{i \in I} X_i$ un șir Cauchy în $\bigoplus_{i \in I} X_i$. Deoarece $\| x_i^n - x_i^m \| \leqslant \| x^n - x^m \|$, $\forall i \in I$, rezultă că $\{x_i^n\}$ este șir Cauchy în X_i, $\forall i \in I$. Fie $x_i \in X_i$ limita acestui șir. Vom arăta că $(x_i) \in \bigoplus_{i \in I} X_i$, iar (x_i) este limita șirului dat. Fie $\varepsilon > 0$. Există n_0 astfel încît, pentru orice m, $n \geqslant n_0$, să avem: $\sum_{i \in I} \| x_i^n - x_i^m \|^2 < \varepsilon$. Pentru fiecare parte finită $J \subseteq I$, vom avea deci cu atît mai mult: $\sum_{i \in J} \| x_i^n - x_i^m \|^2 < \varepsilon$. Cum $x_i^m \to x_i$, din relația de mai sus se obține: $\sum_{i \in J} \| x_i^n - x_i \|^2 < \varepsilon$, pentru orice $n \geqslant n_0$. Deducem: $\sum_{i \in I} \| x_i^n - x_i \|^2 < \varepsilon$, pentru $n \geqslant n_0$, ceea ce arată că $(x_i^n - x_i) \in \bigoplus_{i \in I} X_i$. Deoarece $(x_i^n) \in \bigoplus_{i \in I} X_i$, rezultă că și $(x_i) \in \bigoplus_{i \in I} X_i$. Ultima inegalitate arată că $\| x^n - x \| < \varepsilon$ pentru $n \geqslant n_0$, deci $\bigoplus_{i \in I} X_i$ este complet.

14. Fie X un spațiu Hilbert, iar $\{e_i\}_{i \in I}$ o bază ortonormală. Să definim $\varphi : X \to l^2(I)$ prin: $\varphi(x) = (\langle x, e_i \rangle)$. Conform identității lui Parseval, $\| x \|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$, ceea ce arată că φ este corect definită și $\| \varphi(x) \| = \| x \|$. Liniaritatea lui φ este o consecință imediată a liniarității produsului scalar în prima variabilă. Faptul că φ este o izometrie garantează injectivitatea. Dacă $(\lambda_i) \in l^2(I)$, fie seria $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$. Deoarece $\sum_{i \in I} |\lambda_i|^2 < \infty$, deducem că seria considerată este convergentă în X. Notînd $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, avem, evident, $\varphi(x) = (\lambda_i)$, deci φ este surjectivă. Mai rămîne să arătăm că produsul scalar este conservat. Dar $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} = \sum_{i \in I} \langle x_i, \langle y, e_i \rangle e_i \rangle = \langle x, \sum_{i \in I} \langle y, e_i \rangle e_i \rangle = \langle x, y \rangle$.

15. Fie $(x_i) \in \bigoplus_{i \in I} X_i$. Să arătăm că $\sum_{i \in I} x_i$ este o serie convergentă în X. Ținînd seama că $\sum_{i \in I} \| x_i \|^2 < \infty$, iar elementele x_i sînt ortogonale două cîte două, afirmația rezultă. Deci, definind $f : \bigoplus_{i \in I} X_i \to X$ prin $f((x_i)) = \sum_{i \in I} x_i$, avem o aplicație corect definită și $f|_{X_i}$ este incluziunea. Faptul că f este liniară se constată imediat. Injectivitatea lui f rezultă din $\| f((x_i)) \|^2 = \| \sum_{i \in I} x_i \|^2 = \sum_{i \in I} \| x_i \|^2 = \| x_i \|^2$. Dacă am presupune că $f(\bigoplus_{i \in I} X_i) \neq X$, atunci ar exista

$x \neq 0$ astfel încît $x \perp f(\bigoplus_{i \in I} X_i)$. Însă $f(\bigoplus_{i \in I} X_i)$ este o parte totală în X, deoarece conține $\bigcup_{i \in I} X_i$, care este totală prin ipoteză. Rezultă că f este surjectivă. În sfîrșit, avînd în vedere continuitatea produsului scalar și faptul că elementele x_i sînt ortogonale două cîte două, obținem:

$$<f((x_i)), f((y_i))> = <\sum_{i \in I} x_i, \sum_{i \in I} y_i> = \sum_{i \in I} <x_i, y_i> = <(x_i), (y_i)>.$$

16. a) Deoarece X^* este spațiu Banach, este suficient să mai arătăm că norma este indusă de un produs scalar. Fie $f, g \in X^*$. Conform teoremei lui Riesz, există $x, y \in X$ astfel încît: $f(u) = \langle u, x\rangle$ și $g(u) = \langle u, y\rangle$, $\forall u \in X$. Să definim: $\langle f, g\rangle = \langle y, x\rangle$. Avem: $\langle f, f\rangle = \| x \|^2 = \|f\|^2 \geqslant 0$, iar $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Evident, $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$. Dacă f' corespunde lui x', atunci: $(f + f')(u) = f(u) + f'(u) = \langle u, x\rangle + \langle u, x'\rangle = \langle u, x + x'\rangle$, deci $(f + f')$ corespunde lui $(x + x')$ și: $\langle f + f', g\rangle = \langle y, x + x'\rangle = \langle y, x\rangle + \langle y, x'\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f', g\rangle$. Dacă $\lambda \in \Gamma$ atunci $(\lambda f)(u) = \lambda f(u) = \langle \lambda u, x\rangle = \langle u, \bar{\lambda} x\rangle$, deci: $\langle \lambda f, g\rangle = \langle y, \bar{\lambda} x\rangle = \lambda \langle y, x\rangle = \lambda \langle f, g\rangle$, ceea ce încheie demonstrația.

b) Teorema lui Riesz afirmă că J_X este aplicație surjectivă. Cu cele de mai sus J_{X^*} există, deci $J_{X^*} \circ J_X$ este surjectivă, Rămîne să mai arătăm că $J_{X^*} \circ J_X$ coincide cu izomorfismul natural. Fie $x \in X$, $f \in X$:

$$J_{X^*}[J_X(x)](f) = \langle f, J_X(x)\rangle = f(x) = \Phi_X(f).$$

17. a) Avem: $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi)^{-1/2} f(t)\, dt = 0$; $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi)^{-1/2} \cos nt \cdot f(t) dt = 0$; $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi)^{-1/2} \sin nt \cdot f(t) dt = 2n^{-1}(\pi)^{-1/2}((-1)^n - 1)$, deci $b_{2k} = 0$ iar: $b_{2k+1} = -4(2k + 1)^{-1}(\pi)^{-1/2}$.

b) Seria Fourier este deci: $-4(\pi)^{-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} (2k + 1)^{-1} \cdot \sin (2k + 1)t$.

Aplicînd criteriul lui Dirichlet, seria dată rezultă uniform convergentă pe orice interval închis din $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Deoarece convergența uniformă implică convergența în L^2 ($[-\pi, \pi]$), deducem că, pentru orice $t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, $-4(\pi)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)^{-1} \sin (2k+1)\, t = f(t)$. Deoarece, în $t = 0$, suma seriei este evident 0, rezultă că s-a determinat suma seriei.

c) Identitatea lui Parseval devine: $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |b_{2k+1}|^2$. Însă $\|f\|^2 = 2\pi$, în timp ce $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{2k+1}|^2 = 16\pi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)^{-2}$, de unde $\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 1)^{-2} = 1/8\, \pi^2$. Fie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Avem: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1/4\, S + 1/8\, \pi^2$, de unde $S = \frac{\pi^2}{6}$.

18. (*i*) Deoarece $A \subseteq A^{\perp\perp}$, iar $A^{\perp\perp}$ este subspațiu liniar închis, deducem că $\overline{\mathcal{J}(A)} \subseteq A^{\perp\perp}$. Dacă incluziunea ar fi strictă, fie $x \in A^{\perp\perp}$, $x \notin \overline{\mathcal{J}(A)}$. Există deci $f \in X^*$ astfel încît $f(x) = 1$ și $f(y) = 0$, $\forall\, y \in A$. Cu teorema lui Riesz există, $u \in X$ astfel încît $f(z) = \langle z, u\rangle$, $\forall z \in X$. În particular, din $\langle y, u\rangle = 0$, $\forall y \in A$, deducem $u \in A^{\perp}$, ceea ce contrazice $\langle x, u\rangle = 1$ și $x \in A^{\perp\perp}$. (*ii*) Avem $A^{\perp} \oplus A^{\perp\perp} = X$ și $A^{\perp\perp} \oplus A^{\perp\perp\perp} = X$. Din unicitatea descompunerii ortogonale, deducem egalitatea propusă. (*iii*) Dacă A este subspațiu liniar, atunci $A = \mathcal{J}(A)$, deci egalitatea rezultă din (*i*). (*iv*) Dacă A este subspațiu liniar închis, atunci $A = \overline{\mathcal{J}(A)}$, deci egalitatea rezultă din (*i*).

19. Dacă presupunem X spațiu complex:
$\langle T(x + y), x + y\rangle - \langle T(x - y), x - y\rangle + i\langle T(x + iy), x + iy\rangle - i\langle T(x - iy), x - iy\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle - \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle - \langle Ty, y\rangle + i\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle + i\langle Ty, y\rangle - i\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle - i\langle Ty, y\rangle = 4\langle Tx, y\rangle$. Folosind $\langle Tx, x\rangle = 0$, $\forall x \in X$, urmează $\langle Tx, y\rangle = 0$, $\forall x, y \in X$, de unde $Tx = 0$, $\forall x \in X$, adică $T = 0$.

20. Fie $J_X : X \to X^*$, $J_Y : Y \to Y^*$ izomorfismele date de teorema lui Riesz. Pentru orice $y \in Y$ și $x \in X$, avem: $J_X(T^*y)(x) = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$, $T'(J_Y y)(x) = (J_Y y)(Tx) = \langle Tx, y\rangle$, ceea ce arată că $J_X \circ T^* = T' \circ J_Y$. Urmează că, identificînd X cu X^* și Y cu Y^* prin teorema lui Riesz, T' și T^* coincid.

21. $1 \Rightarrow 2$. Se știe că $T(X)$ este subspațiu închis în Y (conform ex. VI.7) iar $T^{-1} : T(X) \to X$ există și este continuu. Fie Y_1 complementul ortogonal al lui $T(X)$ în Y. Pentru fiecare $y \in Y$ să definim $S(y) = T^{-1}(y_2)$, unde $y = y_1 + y_2$, cu $y_1 \in Y_1$ și $y_2 \in T(X)$. Din construcție, $S \in L(X)$ iar $S(Tx) = T^{-1}(Tx) = x$, deci $S \circ T = 1_X$. $2 \Rightarrow 1$. Oricare ar fi $x \in X$, avem: $\|x\| = \|S(Tx)\| \leqslant \|S\|\,\|Tx\|$, iar $\|S\| \neq 0$, căci altfel $S = 0$, ceea ce contrazice $S \circ T = 1_X$.

22. $1 \Rightarrow 2$. Avem: $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|Tx\|$, iar $\|T^{-1}\| > 0$. Deoarece $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$, rezultă că și T^* este mărginit inferior. $2 \Rightarrow 3$. Orice operator mărginit inferior este, evident, injectiv. $3 \Rightarrow 4$. Avem $\{0\} = \mathrm{Ker}(T^*) = \overline{T(X)}^{\perp}$, conform exercițiului 24, deci $\overline{T(X)} = \{0\}^{\perp} = X$. $4 \Rightarrow 1$. T este injectiv, deoarece este mărginit inferior. Cu exercițiul VI.7., obținem că $T(X)$ este închis, deci T este surjectiv. Urmează existența lui T^{-1}. Din faptul că T este mărginit inferior, deducem $T^{-1} \in L(X)$.

23. Avem: $\|(1_X + T)x\|^2 = \langle x + Tx, x + Tx\rangle = \|x\|^2 + 2\langle Tx, x\rangle + \|Tx\|^2 \geqslant \|x\|^2$ deci $(1_X + T)$ este mărginit inferior. Deoarece: $\langle T^*x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle \geqslant 0$, $\forall x \in X$, urmează că și $(1_X + T^*)$ este mărginit inferior. Folosind exercițiul 22, deducem $(1_X + T)^{-1} \in L(X)$. Ultima afirmație decurge din: $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geqslant 0$, $\forall x \in X$.

24. Fie $y \in \mathrm{Ker}(T^*)$ și $y' \in T(X)$; deci există $x' \in X$ astfel încît $y' = Tx'$. Avem: $\langle y, y' \rangle = \langle y, Tx' \rangle = \langle T^*y, x' \rangle = \langle 0, x' \rangle = 0$, ceea ce arată că $\mathrm{Ker}\ (T^*) \subseteq T(X)^\perp$. Reciproc, fie $y \in Y$ cu proprietatea că $\langle y, y' \rangle = 0$, $\forall y' \in T(X)$. Deci $\langle y, Tx \rangle = 0$, $\forall x \in X$, sau $\langle T^*y, x \rangle = 0$, $\forall x \in X$. De aici $T^*y = 0$, adică $y \in \mathrm{Ker}\ (T^*)$, dovedind astfel prima egalitate. Aplicînd această egalitate pentru T^* în loc de T și ținînd seama că $T^{**} = T$, se obține a doua egalitate. Luînd ortogonalul în ambii membri ai primei egalități și ținînd seama că $T^*(Y)^{\perp\perp} = \overline{T^*(Y)}$ (conform ex. 18), rezultă a treia egalitate. În sfîrșit, luînd ortogonalul în ambii membri ai celei de-a doua egalități, obținem a patra egalitate.

25. Fie $Tx = x$, deci $\langle Tx, x \rangle = \langle x, x \rangle$. Dar $\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle \leqslant \leqslant \| x \| \, \| T^*x \| \leqslant \| x \|^2$. Din cele de mai sus avem în mod necesar egalitate. Avînd în vedere exercițiul 3, urmează $x = T^*x$. Reciproc, dacă $T^*x = x$, din cele de mai sus: $Tx = T^{**}\ x = x$, căci $\| T^* \| = \| T \| \leqslant 1$.

26. Suficiența condiției este evidentă. Să presupunem deci că $T(X)$ este de dimensiune 1 și fie $y \in T(X)$, $y \neq 0$, astfel încît oricare $y' \in T(X)$ se exprimă $y' = \lambda y$, cu $\lambda \in \mathbf{C}$. Deci, pentru fiecare $x \in X$, există un unic $\lambda(x) \in \mathbf{C}$, astfel încît $Tx = \lambda(x)y$. Datorită unicității și liniarității lui T, avem: $T(\alpha x + \beta x') = \lambda(\alpha x + \beta x')y$; $T(\alpha x + \beta x') = \alpha Tx + \beta Tx' = \alpha\lambda(x)y + \beta\lambda(x')y = (\alpha\lambda(x) + \beta\lambda(x'))y$, ceea ce arată că $\lambda : X \to \mathbf{C}$ este liniară. Apoi: $\| Tx \| = |\lambda(x)| \, \| y \|$, de unde: $|\lambda(x)| = \| y \|^{-1} \, \| Tx \| \leqslant \| T \| \, \| y \|^{-1} \, \| x \|$, deci λ este continuă. Conform teoremei lui Riesz, există $z \in X$ astfel încît $\lambda(x) = \langle x, z \rangle$, $\forall x \in X$. Este evident că $z \neq 0$, în caz contrar $Tx = 0$, $\forall x \in X$. Deoarece $\langle Tx, u \rangle = \langle x, T^* u \rangle$, deducem: $\langle \langle x\, z \rangle\, y, u \rangle = \langle x, T^*u \rangle$, adică: $\langle x, z \rangle \langle y, u \rangle = \langle x, T^*u \rangle$ sau: $\langle x, \langle u, y \rangle z \rangle = \langle x, T^*u \rangle$, de unde: $T^*u = \langle u, y \rangle z$, $\forall u \in X$. Deoarece $\| Tx \| = \| \langle x, z \rangle\, y \| = |\langle x, z \rangle| \, \| y \| \leqslant \| y \| \, \| z \| \, \| x \|$, urmează că $\| T \| \leqslant \| y \| \, \| z \|$. Alegînd $x = \| z \|^{-1} z$, găsim: $\| T \| \geqslant \| Tx \| = \| \langle \| z \|^{-1} z, z \rangle\, y \| = \| z \| \, \| y \|$. În sfîrșit, $T(Tx) = \langle Tx, z \rangle\, y = \langle \langle x, z \rangle\, y, z \rangle\, y = \langle y, z \rangle \langle x, z \rangle\, y = \langle y, z \rangle\, Tx$. Avem: $TT^*x = \langle T^*x, z \rangle\, y = \langle \langle x, y \rangle\, z, z \rangle\, y = \| z \|^2 \langle x, y \rangle\, y$, iar: $T^*Tx = \langle Tx, y \rangle\, z = \langle \langle x, z \rangle\, y, y \rangle\, z = \| y \|^2 \langle x, z \rangle\, y$. Pentru ca T să fie normal, este deci necesar să existe $\lambda \in \mathbf{C}$ astfel încît $y = \lambda z$. Reciproc, dacă această condiție este îndeplinită, atunci: $TT^*x = \| z \|^2 \bar{\lambda} \langle x, z \rangle\, \lambda z = \| y \|^2 \langle x, z \rangle\, z = T^*Tx$, deci condiția este și suficientă. Deci $y = \lambda z$ este o condiție necesară pentru ca T să fie autoadjunct. Însă: $Tx = \langle x, z \rangle y = \langle x, z \rangle \lambda z$ iar: $T^*x = \langle x, y \rangle\, z = \bar{\lambda} \langle x, z \rangle z$, deci dacă $T = T^*$ atunci în mod necesar $\lambda = \bar{\lambda}$, adică $y = \lambda z$, cu $\lambda \in \mathbf{R}$. Reciproc, relațiile de mai sus dovedesc că această condiție este suficientă pentru ca T să fie autoadjunct. Condiția $y = \lambda z$ cu $\lambda \in \mathbf{R}$ este deci necesară pentru ca T să fie proiector. Însă: $T^2 = \langle y, z \rangle\, T$, deci dacă T este proiector, atunci în mod necesar $\langle y, z \rangle = 1$, sau $y = \| z \|^{-2} z$. Reciproc, din cele de mai sus, această condiție este suficientă. În sfîrșit, dacă T este unitar, atunci T este surjectiv, deci în mod necesar X este de dimensiune algebrică 1. În plus $x = TT^*x = \| z \|^2 \langle x, y \rangle y$, deci $\| y \| \, \| z \| = 1$. Reciproc, dacă X este de dimensiune 1, iar $\| y \| \, \| z \| = 1$, atunci T admite invers, iar relația precedentă asigură că acest invers este T^*.

27. Dacă $x' - x \in X_1$ atunci $x' = x_1' + x_2$, ceea ce arată că φ este corect definită. Deoarece proiecția pe un subspațiu liniar închis este liniară, deducem că φ este liniară. Deoarece $x_2 \in x + X_1$, rezultă că $\| x_2 \| \geqslant \| x + X_1 \|$, adică: $\| \varphi(x) \| \geqslant \| x \|$. Însă, oricare ar fi $x \in X$ cu $x - x_2 \in X_1$, avem $\langle x - x_2, x_2 \rangle = 0$, sau: $\langle x, x_2 \rangle = \| x_2 \|^2$. Însă $\| x \| \, \| x_2 \| \geqslant \langle x, x_2 \rangle$, adică $\| x \| \geqslant \| x_2 \|$. Deci $\| x +$

$+ X_1\| \geqslant \| x_2\|$ și φ rezultă o izometrie. Fiind liniară, φ urmează a fi injectivă. În sfîrșit, oricare ar fi $x \in X_1^{\perp}$, avem $\varphi(x + X_1) = x$, ceea ce încheie demonstrația.

28. Avem de arătat că, pentru orice $y \in L^2([a, b]): \int_a^b Tx(u)\overline{y(u)}\,du = \int_a^b x(u)\overline{T^*y(u)}du$. Ținînd seama de definiții și aplicînd teorema lui Fubini, obținem: $\int_a^b Tx(u)\overline{y(u)}du = \int_a^b (y(u) \int_a^b K(u, v)x(v)dv)du = \int_a^b (x(v) \cdot \int_a^b (K(u,v)\overline{y(u)}du)dv = \int_a^b (x(v) \int_a^b \overline{K(u, v)}y(u)du)dv = \int_a^b x(v)\overline{T^*y(v)}dv$.

29. 1) Avem $\sum_{n=1}^{\infty} | n^{-1}(n - 1)\, x_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} | x_n|^2$, deci T este bine definit. Liniaritatea fiind evidentă, relația de mai sus arată că T este continuu căci $\| Tx\| \leqslant \|x\|$. Fie $y = (y_n) \in l^2$. Deoarece $\langle Tx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1}(n - 1)x_n)\overline{y}_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{(n^{-1}(n - 1)y_n)} = \langle x, T^*y\rangle$, rezultă că: $T^*y = (n^{-1}(n - 1)y_n) = Ty$, deci T este autoadjunct. 2) Ca mai sus, din: $\sum_{n=1}^{\infty} | i^n x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ deducem că T este bine definit și continuu, liniaritatea fiind imediată. Apoi, pentru $y = (y_n) \in l^2$ avem: $\langle Tx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (i^n x_n)\overline{y}_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{(-i)^n y_n} = \langle x, T^*y\rangle$, deci $T^*y = ((-1)^n i^n y_n)$, ceea ce arată că T nu este autoadjunct. Avem însă: $TT^*x = T\,(((-1)^n i^n x_n)) = (i^n(-1)^n i^n x_n) = (x_n)$ iar $T^*Tx = T^*\,((i^n x_n)) = ((-1)^n i^n i^n x_n) = (x_n)$, deci T este normal, chiar unitar. 3) Avem: $\sum_{n=2}^{\infty} | x_n|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} | x_n|^2$, deci T este bine definit și continuu, liniaritatea fiind imediată. Apoi, pentru $y = (y_n) \in l^2$, avem: $\langle Tx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}\overline{y}_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y}_{n-1} = \langle x, T^*y\rangle$, cu convenția $y_0 = 0$. Deci: $T^*y = (0, y_1, ...)$, ceea ce arată că T nu este autoadjunct. Deoarece: $TT^*x = T\,((0, x_1, ...)) = (x_1, x_2, ...)$ iar: $T^*Tx = T^*\,((x_2, x_3, ...)) = (0, x_2 ...)$, rezultă că T nu este nici normal, nici unitar.

30. a) Avem $R^* = (T + i1_X)^* = T^* + \bar{i}1_X = T - i1_X$, deci $RR^* = (T + i1_X)(T - i1_X) = T^2 + 1_X$, iar $R^*R = (T - i1_X)(T + i1_X) = T^2 + 1_X$. b) Avem: $\|Rx\|^2 = \langle x + iTx, x + iTx\rangle = \| x\|^2 + \langle x, iTx\rangle + \langle iTx, x\rangle + \| Tx\|^2 = \| x\|^2 + \| Tx\|^2$, deci $\|Rx\| \geqslant \|x\|$, ceea ce arată că, dacă $Rx = 0$, atunci $x = 0$ și R rezultă injectiv. c) Din $\| Rx\| \geqslant \|x\|$ și exercițiul VI. 7 urmează că $R(X)$ este subspațiu liniar închis. Cu exercițiul 24: $R(X) = \mathrm{Ker}\,(R^*)^{\perp}$. Însă $\| R^*x\|^2 = \| x\|^2 + \| Tx\|^2$, deci $\mathrm{Ker}(R^*) = \{0\}$ și $R(X) = X$. Deci R este bijectiv. Deoarece $\| Rx\| \geqslant \| x\|$ urmează că R^{-1} este continuu. d) Avem: $(R^*R^{-1})^* = (R^{-1})^*R^{**} = (R^*)^{-1}R$, iar $(R^*R^{-1})^{-1} = (R^{-1})^{-1}(R^*)^{-1} = R(R^*)^{-1}$. Din faptul că $RR^* = R^*R$ deducem $(R^*)^{-1}R = R(R^*)^{-1}$, adică $(R^*R^{-1})^* = (R^*R^{-1})^{-1}$, ceea ce arată că R^*R^{-1} este unitar.

31. Dacă T este autoadjunct: $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$, deci $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}$, $\forall x \in X$. Reciproc, să presupunem că $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}$, $\forall x \in X$. Oricare ar fi $x, y \in X$, avem (conform ex. 18):
$\langle Tx, x\rangle = 1/4\,(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle)$ deci: $\langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle} = 1/4\,(\langle T(y+x), y+x\rangle - \langle T(y-x), y-x\rangle + i\langle T(y-ix), y-ix\rangle - i\langle T(y+ix), y+ix\rangle) = 1/4\,(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle) = \langle Tx, y\rangle$, ceea ce arată că $T = T^*$.

32. Conform exercițiului 31, $\langle T_i x, x\rangle \in \mathbf{R}$, $\forall x \in X$ și $i = 1, 2$, deci definiția este corectă. Avem $\langle Tx, x\rangle \leqslant \langle Tx, x\rangle$, $\forall x \in X$, deci $T \leqslant T$. Dacă $\langle T_1 x, x\rangle \leqslant \langle T_2 x, x\rangle$ și $\langle T_2 x, x\rangle \leqslant \langle T_1 x, x\rangle$, $\forall x \in X$, urmează $\langle (T_1 - T_2)x, x\rangle = 0$, $\forall x \in X$, deci $T_1 = T_2$, conform exercițiului 19. În sfîrșit, dacă $T_1 \leqslant T_2$ și $T_2 \leqslant T_3$, avem $\langle T_1 x, x\rangle \leqslant \langle T_2 x, x\rangle \leqslant \langle T_3 x, x\rangle$, $\forall x \in X$, deci $T_1 \leqslant T_3$. Avem deci o relație de ordine. Apoi: $\langle (T_1 + T)x, x\rangle = \langle T_1 x, x\rangle + \langle Tx, x\rangle \leqslant \langle T_2 x, x\rangle + \langle Tx, x\rangle = \langle (T_2 + T)x, x\rangle$, deci $T_1 \leqslant T_2 \Rightarrow T_1 + T \leqslant T_2 + T$. Dacă $\lambda \geqslant 0$, avem $\lambda\langle T_1 x, x\rangle \leqslant \lambda\langle T_2 x, x\rangle$ sau: $\langle (\lambda T_1)x, x\rangle \leqslant \langle (\lambda T_2)x, x\rangle$, deci $T_1 \leqslant T_2 \Rightarrow \lambda T_1 \leqslant \lambda T_2$.

33. Să observăm că 3) și 4) au sens, deoarece TT^* și T^*T sînt autoadjuncți. $1 \Leftrightarrow 2$ din definiția normei unui operator. $2 \Leftrightarrow 5$ din $\|T\| = \|T^*\|$. $5 \Rightarrow 6$ căci $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2 \leqslant 1$. $6 \Rightarrow 1$ deoarece: $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*Tx\|\,\|x\| \leqslant \|T^*T\|\,\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. $3 \Leftrightarrow 1$ căci $(T^*T \leqslant 1_X) \Leftrightarrow (\langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle, \forall x \in X) \Leftrightarrow (\langle Tx, Tx\rangle \leqslant \|x\|^2, \forall x \in X) \Leftrightarrow (\|Tx\| \leqslant \|x\|, \forall x \in X)$. $4 \Leftrightarrow 5$ căci $(TT^* \leqslant 1X) \Leftrightarrow (\langle TT^*x, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle, \forall x \in X) \Leftrightarrow (\langle T^*x, T^*x\rangle \leqslant \|x\|^2, \forall x \in X) \Leftrightarrow (\|T^*x\| \leqslant \|x\|, \forall x \in X) \Leftrightarrow (\|T\| \leqslant 1)$.

34. Avem $\langle T^*STx, x\rangle = \langle S(Tx), Tx\rangle \geqslant 0$ prin ipoteza $S \geqslant 0$. În particular, $1_X \geqslant 0$, deci a doua afirmație.

35. Dacă $S^*S = T^*T$ atunci, oricare ar fi $x, y \in X$, avem $\langle S^*Sx, y\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle$, adică $\langle Sx, Sy\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$. Reciproc, dacă $\langle Sx, Sy\rangle = \langle Tx, Ty\rangle, \forall x, y \in X$, deducem $\langle S^*Sx, y\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle$, $x, y \in X$, de unde $S^*Sx = T^*Tx$, $\forall x \in X$, adică $S^*S = T^*T$.

36. P fiind proiector, $P(X)$ este subspațiu liniar închis. Fie $x \in X$ și $x_1 \in P(X)$, $x_2 \in P(X)^\perp$ astfel încît $x = x_1 + x_2$. Deoarece $x_1 \in P(X)$, deducem că $Px_1 = x_1$, deci $Px_2 = 0$. Rezultă: $\langle Px, x\rangle = \langle x_1, x_1 + x_2\rangle = \|x_1\|^2$, deci $\langle Px, x\rangle \geqslant 0$. Cum $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geqslant \|x_1\|^2$, rezultă și $\langle Px, x\rangle \leqslant \|x\|^2$. De aici $\|P\| \leqslant 1$. Să presupunem $P \neq 0$, deci există $x \neq 0$ astfel încît $x \in P(X)$. Deoarece $Px = x$, urmează $\|Px\| = \|x\|$, adică $\|P\| = 1$. Dacă $x \in \mathrm{Ker}\ P$, atunci $Px = 0$ deci $\langle Px, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$. Reciproc, dacă $\langle Px, x\rangle = 0$, urmează $x_1 = 0$, deci $x = x_2$ iar $Px_2 = 0$. Dacă $x = Px$, evident $x \in P(X)$. Reciproc, dacă $x \in P(X)$, atunci $x = Px$.

37. Dacă P este proiector, atunci $P = P^*$, deci $P^*P = P^2 = P$. Invers, dacă $P^*P = P$, atunci $P^* = (P^*P)^* = P^*P^{**} = P^*P = P$, deci $P^2 = P^*P = P$, ceea ce arată că P este proiector.

38. $1 \Rightarrow 2$. Avem $(P_2 - P_1)^2 = P_2 - P_1$, deci $P_2P_1 + P_1P_2 = 2P_1$. Înmulțind la dreapta și la stînga cu P_1, găsim: $P_1P_2P_1 + P_1P_2 = 2P_1$ și $P_2P_1 + P_1P_2P_1 = 2P_1$, de unde $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$. Cu aceasta, am demonstrat și $1 \Rightarrow 3$. Apoi $2 \Rightarrow 3$ căci $P_1 = P_1^* = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1$. Folosind calculele de mai sus, deducem $3 \Rightarrow 1$. Exercițiul 36 arată că, pentru orice proiector P, avem $P \geqslant 0$, deci $1 \Rightarrow 7$, căci $P_2 - P_1 \geqslant 0$ implică $P_2 \geqslant P_1$. $7 \Rightarrow 5$. Oricare ar fi $x \in X$, avem: $\langle P_2 x, x\rangle \geqslant \langle P_1 x, x\rangle \geqslant 0$. Dacă $x \in \mathrm{Ker}\ (P_2)$, urmează $P_2x = 0$, deci $\langle P_1 x, x\rangle = 0$, de unde $P_1x = 0$. $5 \Leftrightarrow 6$. Conform exercițiu-

lui 24, avem $P_1(X)^\perp = \mathrm{Ker}\,(P_1^*) = \mathrm{Ker}\,(P_1)$. $7 \Leftrightarrow 4$. Avem $(\| P_1x_1\| \leqslant \| P_2x\|) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\langle P_1x,\ P_1x\rangle \leqslant \langle P_2x,\ P_2x\rangle) \Leftrightarrow (\langle P_1x,\ x\rangle \leqslant \langle P_2x,\ x\rangle) \Leftrightarrow P_1 \leqslant P_2$. $5 \Rightarrow 1$. Fie $x \in X$ și $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(P_2)$, $x_2 \in P_2(X)$ astfel încît $x = x_1 + x_2$. Avem: $P_1x = P_1x_2$ conform ipotezei. Dar $5 \Rightarrow 6$, deci $P_1x_2 \in P_2(X)$ și deci $P_2P_1x = P_2P_1x_2 =$ $= P_1x_2 = P_1x$. Apoi: $P_1P_2x = P_1x_2 = P_1x$, deci $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$. Verificăm acum că $(P_2 - P_1)$ este proiector: $(P_2 - P_1)^* = P_2^* - P_1^* = P_2 - P_1$; $(P_2 - P_1)^2 = P_2^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_1^2 = P_2 - P_1 - P_1 + P_1 = P_2 - P_1$. În sfîrșit, să demonstrăm ultima afirmație. Dacă $(P_2 - P_1)$ este proiector, iar $x \in (P_2 - P_1)\,(X)$, atunci $(P_2 - P_1)\,(x) = x$. Aplicînd P_1 și folosind 2), urmează $P_1x = 0$, de unde $P_2x = x$, adică $x \in P_2(X) \cap \mathrm{Ker}\,(P_1)$. Reciproc, dacă $x \in P_2(X) \cap \mathrm{Ker}\,(P_1)$, avem $P_2x = x$ și $P_1x = 0$, de unde $(P_2 - P_1)\,(x) = x$, adică $x \in (P_2 - P_1)\,(X)$.

39. $1 \Rightarrow 2$. Avem: $(P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_1P_2$ și $(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 =$ $= P_1P_2P_2P_1 = P_1P_2P_1 = P_1P_1P_2 = P_1P_2$. $2 \Rightarrow 1$. Avem: $P_1P_2 = (P_1P_2)^*$, adică $P_1P_2 = P_2P_1$. $1 \Rightarrow 3$. Avem: $(P_1 + P_2 - P_1P_2)^* = P_1^* + P_2^* - P_2^*P_1^* =$ $= P_1 + P_2 - P_1P_2$ și $(P_1 + P_2 - P_1P_2)^2 = P_1 + P_1P_2 - P_1P_2 + P_2P_1 +$ $+ P_2 - P_2P_1P_2 - P_1P_2P_1 - P_1P_2 + P_1P_2P_1P_2 = P_1 + P_2 - P_1P_2$. $3 \Rightarrow 1$. Deoarece $P_1 + P_2 - P_1P_2 = (P_1 + P_2 - P_1P_2)^*$, rezultă $P_1P_2 =$ $= P_2P_1$. Să presupunem acum P_1P_2 proiector. Deoarece $P_1P_2 = P_2P_1$, rezultă că $P_1P_2(X) \subseteq P_1(X) \cap P_2(X)$. Fie acum $x \in P_1(X) \cap P_2(X)$, deci $P_1x =$ $= P_2x = x$. Urmează $P_1P_2x = P_1x = x$, deci $x \in P_1P_2(X)$.

40. $2 \Rightarrow 4$. Fie $x \in P_2(X)$, deci $P_2x = x$. Rezultă din ipoteză $P_1x = 0$, adică $x \in \mathrm{Ker}\,(P_1) = P_1(X)^\perp$. Deci $P_2(X) \subseteq P_1(X)^\perp$, ceea ce este echivalent cu $P_1(X)^\perp P_2(X)$. $4 \Rightarrow 2$. Fie $x \in X$. Deoarece $P_2x \in P_2(X)$, avem $P_2x \in P_1(X)^\perp =$ $= \mathrm{Ker}\,(P_1)$, adică $P_1(P_2x) = 0$. Avînd în vedere simetria relației 4), rezultă și implicațiile: $3 \Rightarrow 4$ și $4 \Rightarrow 3$. $2 \Rightarrow 1$. Deoarece $2 \Rightarrow 3$, avem $P_1P_2 =$ $= P_2P_1 = 0$. Însă $(P_1 + P_2)^* = P_1 + P_2$; $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_1P_2 +$ $+ P_1P_2 + P_2 = P_1 + P_2$; deci $P_1 + P_2$ este proiector. $1 \Rightarrow 2$. Dacă $P_1 + P_2$ este proiector, în mod necesar $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. Înmulțind la dreapta și la stînga cu P_1, găsim: $P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0$ și $P_1P_2P_1 + P_2P_1 = 0$, deci $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$. Fie $P_1 + P_2$ proiector. Din 4) este clar că suma $P_1(X) \oplus P_2(X)$ este directă. De asemenea, este evident că $(P_1 +$ $+ P_2)(X) \subseteq P_1(X) \oplus P_2(X)$. Fie $x \in P_1(X) \oplus P_2(X)$, deci există $x_1,\ x_2 \in X$ astfel încît $x = P_1x_1 + P_2x_2$. Avem: $(P_1 + P_2)(x) = (P_1 + P_2)\,(P_1x_1 +$ $+ P_2x_2) = P_1x + P_2P_1x_1 + P_1P_2x_2 + P_2x_2 = P_1x_1 + P_2x_2 = x$, ceea ce arată că $x \in (P_1 + P_2)\,(X)$.

41. a) Evident: $\mathrm{Ker}\,(T) \subseteq \mathrm{Ker}\,(T^*T)$. Dacă $T^*Tx = 0$, atunci $\langle T^*Tx,$ $x\rangle = 0$, de unde $\| Tx\| = 0$, adică $x \in \mathrm{Ker}\,(T)$. b) Datorită simetriei, este suficient să arătăm că, dacă T^*T este proiector, atunci $(TT^*)^2 = TT^*$. Însă: $(TT^*)^2 = TT^* \Leftrightarrow TT^*TT^*x = TT^*x, \forall x \in X \Leftrightarrow T(T^*T - 1_X)T^*x = 0,$ $\forall x \in X \Leftrightarrow (T^*T - 1_X)T^*x \in \mathrm{Ker}\,(T) \Leftrightarrow (T^*T - 1_X)T^*x \in \mathrm{Ker}\,(T^*T) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow T^*T(T^*T - 1_X)T^*x = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow T^*TT^*TT^*x = T^*TT^*x, \forall x \in X$. Însă $T^*TT^*Ty = T^*Ty$ prin ipoteză, deci ultima egalitate este verificată. c) Este suficient să arătăm că $T^*Tx = x, \forall x \in Q(X)$ și $TT^*x = x, \forall x \in P(X)$. Cu notațiile propuse: $Qx = x, \forall x \in Q(X)$ și $Px = x, \forall x \in P(X)$, ceea ce rezultă din exercițiul 36.

42. a) Oricare ar fi $x \in X$, avem $Px \in X_1$. Dacă presupunem $T(X_1) \subseteq X_1$, atunci $TPx \in X_1$, deci $P(TPx) = TPx$. Reciproc, să presupunem că $PTP =$ $= TP$ și fie $x \in X_1$. Avem $Px = x$ deci $PTPx = TPx$ devine $P(Tx) = Tx$, ceea ce arată că $Tx \in X_1$, adică $T(X_1) \subseteq X_1$. b) Conform celor de mai sus, $(T(X_1) \subseteq X_1$ și $T^*(X_1) \subseteq X_1) \Leftrightarrow (PTP = TP$ și $PT^*P = T^*P)$. Dacă pre-

supunem că $PT = TP$, deducem $TPP = PTP$, adică $TP = PTP$. Luînd adjuncți: $(TP)^* = (PTP)^*$, adică $PT^* = PT^*P$. Însă iarăși cu ipoteza $PT^* = T^*P$, deci $PT^*P = T^*P$. Reciproc, dacă $PTP = TP$ și $PT^*P = T^*P$, atunci: $PT^* = (TP)^* = (PTP)^* = PT^*P = T^*P$, deci $TP = (PT^*)^* = (T^*P)^* = PT$.

43. a) Avem: $P(T)^* = (a_0 1_H + a_1 T + , ..., + a_n T^n)^* = \bar{a}_0 1_H + \bar{a}_1 T^* + + ... + \bar{a}_n (T^*)^n$. Dacă $a_i \in \mathbf{R}$, atunci, evident, $T = T^*$ implică $P(T)^* = P(T)$. b) Fie T normal. Avem: $P(T)P(T)^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \bar{a}_j T^i (T^*)^j$, iar $P(T)^*P(T) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{a}_i a_j (T^*)^i T^j$. Deoarece T este normal, din $TT^* = T^*T$ rezultă prin recurență: $T^i(T^*)^j = (T^*)^j T^i$, deci $P(T)P(T)^* = P(T)^*P(T)$, ceea ce arată că $P(T)$ este normal.

44. a) Dacă $T \in L(X)$ există atunci, $\forall i \in I$, avem: $|\alpha_i| = \|\alpha_i e_i\| = \|Te_i\| \leqslant \leqslant \|T\|$, deci familia $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ este în mod necesar mărginită. Reciproc, dacă presupunem că există M astfel încît $|\alpha_i| \leqslant M$, $\forall i \in I$, să definim $Tx = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \alpha_i e_i$. Seria din membrul doi este convergentă. În adevăr, termenii fiind ortogonali doi cîte doi, este suficient să verificăm că seria $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle \alpha_i|^2$ este convergentă. Acest fapt rezultă din convergența seriei $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ și din: $|\langle x, e_i \rangle \alpha_i|^2 \leqslant M^2 |\langle x, e_i \rangle|^2$. Deci T este bine definit. Liniaritatea este evidentă, iar continuitatea rezultă din: $\|Tx\|^2 = \|\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \alpha_i e_i\|^2 = = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle \alpha_i|^2 \leqslant M^2 \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = M^2 \|x\|^2$. b) Fie $T^*y = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$. Deoarece $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, trebuie ca: $\langle \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \alpha_i e_i, \sum_{i \in I} \langle y, e_i \rangle e_i \rangle = \langle \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \rangle$ adică: $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \alpha_i \overline{\langle y, e_i \rangle} e_i = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \bar{\lambda}_i e_i$, de unde: $\lambda_i = \langle y, e_i \rangle \bar{\alpha}_i$, deci $T^*x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \bar{\alpha}_i e_i$. Deoarece $TT^* x = T \left(\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \bar{\alpha}_i e_i \right) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle |\alpha_i|^2 e_i$, iar $T^*Tx = T^* \left(\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \alpha_i e_i \right) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle |\alpha_i|^2 e_i$, rezultă că T este întotdeauna normal. Din scrierea lui T^*, urmează că T este autoadjunct dacă și numai dacă $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$, $\forall i \in I$. Dacă T este proiector, din condiția $T^2 = T$ urmează $\alpha_i^2 = \alpha_i$, $\forall i \in I$, adică $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \in I$. Reciproc, dacă această condiție este îndeplinită, atunci $T^2 = T$, iar din cele de mai sus și $T^* = T$. În sfîrșit, T este unitar dacă și numai dacă $TT^* = T^*T = 1_X$, adică dacă și numai dacă $|\alpha_i| = 1$, $\forall i \in I$.

45. Pentru orice $x, y \in l^2$, trebuie ca $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, adică: $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+p} \bar{y}_p = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{z}_n$, unde $T^*y = (z_1, ..., z_n, ...)$. Deducem că: $T_n x = = (0, ..., 0, x_1, ...)$, unde primele n componente sînt 0. Deoarece: $\|T_n x\| = = \left(\sum_{p=0}^{\infty} |x_{n+p}|^2 \right)^{1/2}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ este convergentă, deducem că $\lim_{n \to \infty} \|T_n x\| = = 0$, deci $\lim_{n \to \infty} T_n x = 0$, $\forall x \in X$. Însă: $\|T_n^* x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} = \|x\|$, ceea ce arată că, pentru $x \neq 0$, $\lim_{n \to \infty} T_n x$ fie nu există, fie există, dar este diferită

de 0. Însă, presupunînd $y = \lim_{n\to\infty} T_n x$, ar urma $y_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, contradicție. Rezultă că, oricare ar fi $x \neq 0$, șirul $\{T_n x\}$ nu are limită.

46. Dacă $\{x_n\}$ converge în normă la x, atunci $\| x_n \| \to \| x \|$, fără nici o ipoteză suplimentară. Reciproc, să presupunem X spațiu Hilbert, $\{x_n\}$ slab convergent la x iar $\| x_n \| \to \| x \|$. Deoarece $\| x_n - x \|^2 = \| x_n \|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x_n, x \rangle + \| x \|^2$, iar $\langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle = \| x \|^2$, deducem că $\| x_n - x \| \to 0$, ceea ce arată că $x_n \to x$ în normă.

47. Cu notațiile din enunț, fie $(x, y) \in G(T^*)$ și $(x_1, y_1) \in V(G(T))$. Deci $y = T^* x$ și există $(x_2, y_2) \in G(T)$ astfel încît $(x_1, y_1) = (-y_2, x_2)$. Deoarece $(x_2, y_2) \in G(T)$, urmează $y_2 = T x_2$. Avem deci: $\langle (x, y), (x_1, y_1) \rangle = \langle x, x_1 \rangle + \langle y, y_1 \rangle = \langle x, -y_2 \rangle + \langle T^* x, x_2 \rangle = \langle x, -T x_2 \rangle + \langle T^* x, x_2 \rangle = \langle T^* x, x_2 \rangle - \langle x, T x_2 \rangle = 0$, deci $G(T^*) \subseteq (VG(T))^{\perp}$. Reciproc, oricare ar fi $u \in X$, avem $(u, Tu) \in G(T)$, deci $(-Tu, u) \in VG(T)$. Fie $(x, y) \in X \times X$, cu proprietatea că $(x, y) \in (VG(T))^{\perp}$, deci $\langle (x, y), (-Tu, u) \rangle = 0$, $\forall u \in X$. După efectuarea calculelor: $\langle Tu, x \rangle = \langle u, y \rangle$, $\forall u \in X$, adică: $\langle u, T^* x \rangle = \langle u, y \rangle$, $\forall u \in X$, ceea ce arată că $y = T^* x$, adică $(x, y) \in G(T^*)$.

48. Prin ipoteză, oricare ar fi $x, y \in X$ și $\lambda \in \mathbf{C}$, avem: $\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle \geqslant 0$, adică $\langle Tx, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \bar{\lambda} \langle Tx, y \rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, y \rangle \geqslant 0$. Dacă $\langle Ty, y \rangle = 0$, atunci, pentru orice $x \in X$ și orice $\lambda \in \mathbf{C}$ avem $\langle Tx, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \bar{\lambda} \cdot \langle x, Ty \rangle \geqslant 0$, ceea ce implică $\langle x, Ty \rangle = 0$, $\forall x \in X$, adică $Ty = 0$. Să presupunem $\langle Ty, y \rangle \neq 0$ și fie $\lambda = -\langle Tx, y \rangle (\langle Ty, y \rangle)^{-1}$. Obținem: $|\langle Tx, y \rangle|^2 \leqslant \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle$. Cu observația de mai sus, această inegalitate rămîne valabilă și pentru $\langle Ty, y \rangle = 0$, deci oricare ar fi $x, y \in X$. Înlocuind $y = Tx$, obținem prima inegalitate din enunț. Ținînd seama că $\langle T^2 x, Tx \rangle \leqslant \| T^2 x \| \| Tx \| \leqslant \| T \| \| Tx \|^2$, din prima inegalitate se obține a doua.

49. a) Deoarece $T = T^*$, rezultă că putem aplica exercițiul 22, pentru a deduce $T^{-1} \in L(X)$.

b) Avem: $\langle T(P), Q \rangle = \int_0^1 (1 + t) P(t) \overline{Q(t)}\, dt = \int_0^1 P(t) \overline{(1 + t) Q(t)}\, dt = \langle P, T(Q) \rangle$. Apoi: $\| T(P) \|^2 = \int_0^1 (1 + t)^2 |(P(t)|^2\, dt = \int_0^1 |P(t)|^2\, dt + \int_0^1 (2t + t^2) |P(t)|^2\, dt \geqslant \int_0^1 |P(t)|^2\, dt = \| P \|^2$. Fie $P \in X$ și să definim $f(t) = (1 + t)^{-1} P(t)$, pentru orice $t \in [0, 1]$. f este continuă pe $[0, 1]$, deci, conform teoremei lui Weierstrass, există un șir $P_n \in X$ astfel încît $P_n \to f$ uniform pe $[0, 1]$. Urmează că $T(P_n) \to P$ uniform pe $[0, 1]$, deci cu atît mai mult în sensul normei induse de produsul scalar considerat. Deci $T(X)$ este dens în X. În sfîrșit, deoarece gradul lui $T(P)$ este cel puțin 1, rezultă că $T(X) \neq X$. Punctul precedent nu se aplică, deoarece X nu este complet.

50. Deoarece $|tg(t)|^2 \leqslant |g(t)|^2$, deducem că T este corect definit. Apoi: $T(\lambda g + \mu f)(t) = t(\lambda g + \mu f)(t) = \lambda t g(t) + \mu t f(t) = \lambda T(g)(t) + \mu T(f)(t)$, deci T este liniar. Deoarece: $\| Tg \|^2 = \int_0^1 |tg(t)|^2\, dt \leqslant \int_0^1 |g(t)|^2\, dt = \| g \|^2$, deducem că T este continuu și $\| T \| \leqslant 1$. Apoi, oricare ar fi $f, g \in L^2([0,1])$, avem $\langle Tg, f \rangle = \int_0^1 tg(t) \overline{f(t)}\, dt = \int_0^1 g(t) \overline{tf(t)}\, dt = \langle g, Tf \rangle$, ceea ce arată că T este

autoadjunct. În sfîrșit, fie $g_n(t) = (2n+1)^{1/2} t^n$. Avem $g_n \in L^2([0,1])$ și $\|g_n\| = 1$. Apoi: $\|Tg_n\|^2 = \int_0^1 (2n+1)\, t^{2n+2}\, dt = (2n+1)(2n+3)^{-1}$, deci $\|T\| \geqslant (2n+1)^{1/2}(2n+3)^{-1/2}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, de unde $\|T\| \geqslant 1$, adică $\|T\| = 1$.

51. Faptul că $T_n \to T$ slab înseamnă că, oricare ar fi $x \in X$, $T_n x \to Tx$ slab, adică, oricare ar fi $y \in X$, avem $<T_n x, y> \to <Tx, y>$. Prin ipoteză $<T_n x, y> = <x, T_n y>$. Deoarece $<x, T_n y> = \overline{<T_n y, x>}$, rezultă că $<x, T_n y> \to \overline{<Ty, x>} = <x, Ty>$, adică, oricare ar fi $x, y \in X$, avem $<Tx, y> = <x, Ty>$, ceea ce arată că T este autoadjunct.

52. a) Scriind identitatea lui Parseval pentru $Te_i \in X_2$, avem: $\|Te_i\|^2 = \sum_{j \in J} |<Te_i, f_j>|^2$, deci $\sum_{i \in I} \|Te_i\|^2 = \sum_{(i,j) \in I \times J} |<Te_i, f_j>|^2$. Analog, scriind identitatea lui Parseval pentru $T^* f_j \in X_1$, avem: $\|T^* f_j\|^2 = \sum_{i \in I} |<T^* f_j, e_i>|^2 = \sum_{i \in I} |<Te_i, f_j>|^2$, de unde: $\sum_{j \in J} \|T^* f_j\|^2 = \sum_{(i,j) \in I \times J} |<Te_i, f_j>|^2$.

b) Deoarece $\sum_{i \in I} \|Te_i\|^2 = \sum_{j \in J} \|T^* f_j\|^2$, iar membrul doi nu depinde de alegerea bazei $\{e_i\}_{i \in I}$ rezultă afirmația din enunț.

c) Inegalitatea $N(T_1 + T_2) \leqslant N(T_1) + N(T_2)$ revine la: $\left(\sum_{i \in I} \|(T_1 + T_2)e_i\|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i \in I} \|T_1 e_i\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i \in I} \|T_2 e_i\|^2\right)^{1/2}$, care rezultă din inegalitatea lui Minkowski. Apoi: $N(\lambda T) = \left(\sum_{i \in I} \|\lambda T e_i\|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{i \in I} \|Te_i\|^2\right)^{1/2} = |\lambda| N(T)$

În sfîrșit dacă $x = \sum_{i \in I} <x, e_i> e_i$, atunci $Tx = \sum_{i \in I} <x, e_i> Te_i$, deci aplicînd inegalitatea Cauchy-Schwartz: $\|Tx\|^2 \leqslant N(T)^2 \|x\|^2$, ceea ce dovedește că $N(T) \geqslant \|T\|$.

53. a) Dacă $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$ atunci: $N(\lambda T_1 + \mu T_2) \leqslant |\lambda| N(T_1) + |\mu| N(T_2)$ deci $\lambda T_1 + \mu T_2 \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$.

b) Avem $N(T^*) = \left(\sum_{j \in J} \|T^* f_j\|^2\right)^{1/2} = N(T)$, ceea ce demonstrează echivalența din enunț.

c) Deoarece $\|STe_i\| \leqslant \|S\| \|Te_i\|$, rezultă că: $N(ST)^2 = \sum_{i \in I} \|STe_i\|^2 \leqslant \|S\|^2 \cdot \sum_{i \in I} \|Te_i\|^2 = \|S\|^2 N(T)^2$. Apoi: $N(ST) = N(T^* S^*) \leqslant \|T^*\| N(S^*) = \|T\| N(S)$, ceea ce arată cele două inegalități. De aici: $N(STU) \leqslant \|S\| \|U\| N(T)$. Deci, dacă $T \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$, atunci $STU \in \mathcal{K}(X, Y)$.

54. Să arătăm întîi că orice operator T de rang finit este operator Hilbert-Schmidt. Fie $X = \operatorname{Ker} T^{\perp}$. $T|_X$ este injectiv, iar $T(X) = T(X_1)$, ceea ce arată că X este de dimensiune finită. Dacă $\{e_i\}_{i \in J}$ este o bază ortonormală în X, iar $\{e_i\}_{i \in J \cup K}$ este o bază ortonormală în X_1, atunci: $\sum_{i \in J \cup K} \|Te_i\|^2 = \sum_{i \in K} \|Te_i\|^2 < +\infty$, ultima sumă avînd un număr finit de termeni. Cu aceasta, $T \in \mathcal{K}(X_1, X_2)$. Fie acum $T \in L(X_1, X_2)$ și să presupunem că există $T_n \in L(X_1, X_2)$

de rang finit, astfel încît $N(T - T_n) \to 0$. Există deci n_0 astfel încît $N(T - T_{n_0}) \leqslant 1$, ceea ce implică $N(T) \leqslant N(T - T_{n_0}) + N(T_{n_0}) \leqslant 1 + N(T_{n_0}) < +\infty$, deci $T \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$. Reciproc, fie $T \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$; $\{e_i\}_{i \in I}$ o bază ortonormală în X_1, $\{f_j\}_{j \in J}$ o bază ortonormală în X_2. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există o parte finită $I' \subseteq I$ astfel încît $\sum_{i \notin I'} |\langle Te_i, f_j \rangle|^2 < \varepsilon$ căci familia $\{|\langle Te_i, f_j \rangle|^2\}_{(i,j) \in I \times J}$ este sumabilă. Fie atunci: $X = \mathcal{J}(\{e_i \mid i \in I'\})$. X este de dimensiune finită. Dacă notăm $P \in L(X_1, X_2)$ proiectorul pe X, iar $S = TP$, atunci S este de rang finit, iar $Se_i = Te_i$ pentru $i \in I'$, $Se_i = 0$ pentru $i \notin I'$. Deducem: $N(T - S)^2 = \sum_{i \in I} \|(T - S)e_i\|^2 = \sum_{i \in I} \|Te_i\|^2 = \sum_{i \notin I'} |\langle Te_i, f_j \rangle|^2 < \varepsilon$, ceea ce dovedește existența unui șir de operatori de rang finit, cu proprietatea că $N(T - T_n) \to 0$. Deoarece $\|T - T_n\| \leqslant N(T - T_n)$, din cele de mai sus urmează că T este compact, ca limită în normă a unui șir de operatori de rang finit.

55. Din inegalitatea lui Cauchy-Schwartz: $(\sum_{i \in I} |\langle Te_i, Se_i \rangle|)^2 \leqslant (\sum_{i \in I} \|Te_i\|^2) \cdot (\sum_{i \in I} \|Se_i\|^2)$, deci seria $\sum_{i \in I} \langle Te_i, Se_i \rangle$ este absolut convergentă. Avem: $r(T, T) = N(T)^2 \geqslant 0$. Dacă $r(T, T) = 0$, urmează $N(T) = 0$, deci $T = 0$. Apoi: $r(T_1 + T_2, S) = \sum_{i \in I} \langle (T_1 + T_2) e_i, Se_i \rangle = r(T_1, S) + r(T_2, S)$; $r(\lambda T, S) = \sum_{i \in I} \langle (\lambda T) e_i, Se_i \rangle = \lambda r(T, S)$; $r(T, S) = \sum_{i \in I} \langle \overline{Se_i, Te_i} \rangle = \overline{r(S, T)}$, ceea ce arată că r este un produs scalar, care induce norma N. Deoarece norma indusă este independentă de alegerea bazei, același lucru este valabil și pentru r. Rămîne să arătăm că $\mathcal{H}(X_1, X_2)$ înzestrat cu norma N este complet. Fie $T_n \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$ un șir Cauchy în norma N. Deoarece $\|T_n - T_m\| \leqslant N(T_n - T_m)$ deducem că $\{T_n\}$ este șir Cauchy în $L(X_1, X_2)$. Există deci $T \in L(X_1, X_2)$, astfel încît $\|T_n - T\| \to 0$. Să mai arătăm că $N(T) < +\infty$ și că $N(T_n - T) \to 0$. Fie $J \subseteq I$ o parte finită. Avem: $(\sum_{i \in J} \|Te_i\|^2)^{1/2} \leqslant (\sum_{i \in J} \|(T - T_n) e_i\|^2)^{1/2} + (\sum_{i \in J} \|(T_k - T_n) e_i\|^2)^{1/2} + (\sum_{i \in J} \|T_k e_i\|^2)^{1/2}$. Deoarece $\{T_n\}$ este șir Cauchy, există M astfel încît $N(T_k) \leqslant M$, $\forall\, k \in \mathbf{N}$. Mulțimea J fiind finită, există $m \in \mathbf{N}$ astfel încît $\sum_{i \in J} \|(T - T_m) e_i\|^2 \leqslant 1$. În sfîrșit, există $k \in \mathbf{N}$ astfel încît $\sum_{i \in J} \|(T_k - T_m) e_i\|^2 \leqslant 1$, ceea ce arată că $\left(\sum_{i \in J} \|Te_i\|^2\right)^{1/2} \leqslant M + 2$, oricare ar fi $J \subseteq I$ finită. Rezultă $N(T) < +\infty$, deci $T \in \mathcal{H}(X_1, X_2)$. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare parte finită $J \subseteq I$ există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $\sum_{i \in J} \|(T - T_n) e_i\|^2 < 1/2\, \varepsilon$. Apoi există m_ε astfel încît, pentru m, $n \geqslant m_\varepsilon$, să avem $N(T_n - T_m) < 1/2\varepsilon$. Deoarece m_ε este independent de J, rezultă că, pentru orice parte finită $J \subseteq I$ și orice $m \geqslant m_\varepsilon$, avem $\left(\sum_{i \in J} \|(T - T_m) e_i\|^2\right)^{1/2} < \varepsilon$. Urmează $N(T - T_m) \leqslant \varepsilon$, deci $N(T - T_m) \to 0$.

56. a) După cum se știe [18], pentru aproape orice $t\in[0,\ 1]$, funcția $\tau \to K(\tau,\ t)$ este de pătrat integrabil pe $[0,\ 1]$, deci $\tau \to K(\tau,\ t)\ f(\tau)$ este integrabilă pe $[0,1]$. Apoi: $|\ v_K(f)(t)\ |^2 \leqslant \left(\int_0^1 |\ K(\tau, t)\ |^2\ \mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^1 |\ f(\tau)\ |^2\ \mathrm{d}\ \tau\right) =$ $= \|\ f\ \|^2 \int_0^1 |\ K(\tau,\ t)\ |^2\ \mathrm{d}\tau$, deci: $\int_0^1\ |\ v_K\ (f)(t)\ |^2\ \mathrm{d}t \leqslant \|f\|^2 \int_0^1\int_0^1\ |\ K(\tau,\ t)\ |^2\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}t$, ceea ce arată că $v_K(f)\in L^2([0,\ 1])$. Liniaritatea lui v_K fiind evidentă, inegalitatea precedentă dovedește și continuitatea lui v_K. b) Fie $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ o bază ortonormală în $L^2([0,1])$ și să notăm: $g_{m,n}\ (t,\ t') = \overline{e_m\ (t)}\ e_n\ (t')$. Funcțiile $g_{m,n}$ sînt măsurabile pe $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$, iar $\int_0^1\int_0^1 |\ g_{m,n}\ (t,\ t')\ |^2\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t' = \int_0^1 |\ \overline{e_m(t)}\ |^2\ \mathrm{d}t \int_0^1 |\ e_n\ (t')\ |^2 \mathrm{d}t' =$ $= 1$, deci $g_{m,n}\in L^2([0,\ 1]\times[0,\ 1])$. În plus: $\int_0^1\int_0^1 g_{m,n}\ (t,\ t')\ \overline{g_{p,q}\ (t,\ t')}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}t' =$ $= \int_0^1 \overline{e_m\ (t)}\ \ e_p(t)\ \mathrm{d}t\ \int_0^1 e_n(t')\ \overline{e_q(t')}\ \mathrm{d}t' = \delta_{mp}\ \delta_{nq}$, ceea ce arată că $\{g_{m,n}\}$ este o mulțime ortonormală în L^2 $([0,\ 1]\times[0,\ 1])$. Să arătăm că este totală. Fie $g\in L^2([0,1])\times[0,1])$ astfel încît $\int_0^1\int_0^1 \overline{g_{m,n}(t,\ t')}\ \ g(t,\ \ t')\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}t' = 0,\quad \forall\ m,\ n\in\mathbf{N}.$ Pentru fiecare n fixat, avem: $0 = \int_0^1\int_0^1\ g(t,\ t')\ e_m(t)\ \overline{e_n(t')}\ \ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t' =$ $= \int_0^1 \left[\int_0^1 g(t,\ t')\ \overline{e_n(t')}\ \ \mathrm{d}t'\right] e_m(t)\mathrm{d}t$. Deci există $A_n\subseteq[0,\ 1]$ neglijabilă, astfel încît: $\int_0^1 g(t,\ t')\ \overline{e_n(t')}\ \ \mathrm{d}t' = 0,\quad \forall t\notin A_n$. Deoarece $A = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n$ este neglijabilă, avem: $\int_0^1 g(t,\ t')\ \overline{e_n(t')}\ \mathrm{d}t' = 0,\ \forall t\notin A,\ \forall\ n\in\mathbf{N}$, ceea ce arată că $g(t,\ t') = 0$ pentru aproape orice $t\in[0,\ 1]$, adică $g = 0$ în $L^2([0,\ 1]\times[0,\ 1])$. Deci $\{g_{m,n}\}$ este o bază ortonormală în $L^2([0,\ 1]\times[0,\ 1])$. Vom avea atunci: $N(v_K) =$ $= \sum_{m,n=1}^{\infty}\ |\ < v_K e_m,\ e_n > |^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty}\ |\ \int_0^1\int_0^1 K(t,\ t')\ e_m(t)\ \overline{e_n(t')}\ \ \mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}t'\ |^2 =$ $= \sum_{m,n=1}^{\infty}\ |\ \int_0^1\int_0^1 K(t,\ \ t')\overline{g_{m,n}(t,\ t')}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t'\ |^2 = \int_0^1\int_0^1\ |\ K(t,\ t')\ |^2\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t' < \infty$, ceea ce demonstrează toate afirmațiile.

57. Să presupunem T compact. Dacă ar exista o infinitate $i_1,\ i_2,\ \ldots$ de indici, astfel încît $|\alpha_{i_1}\ |\geqslant\varepsilon_0,\ |\alpha_{i_2}\ |\ \geqslant\varepsilon_0,\ \ldots$, (cu $\varepsilon_0 > 0$) atunci șirul $Te_{i_n} = \alpha_{i_n}e_{i_n}$ ar avea un subșir convergent. Dar familia $\{\alpha_i\}$ este mărginită, iar $<e_{i_n},\ x> \to 0$, oricare ar fi $x\in X$, căci $\sum_{i\in I}|\ <x,\ e_i>\ |^2$ este convergentă. Rezultă că $\{\alpha_{i_n}e_{i_n}\}$ este slab convergent la 0. Urmează că subșirul găsit mai sus are limita 0.

Însă aceasta este absurd, căci $\|\alpha_{i_n} e_{i_n}\| = |\alpha_{i_n}| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Reciproc, să presupunem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o parte finită $J \subseteq I$ astfel încît $|\alpha_i| < \varepsilon$, $\forall\, i \notin J$. Fie P proiectorul pe subspațiul generat de $\{e_i\}_{i \in J}$. TP este deci operator de rang finit, iar $\|T - TP\| \leqslant \varepsilon$. Rezultă că T este compact.

58. Avem $N(T)^2 = \sum_{i \in I} \| Te_i \|^2 = \sum_{i \in I} \|\alpha_i e_i\|^2 = \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2$, deci $T \in \mathcal{B}(X, X)$ $\Leftrightarrow N(T) < \infty \Leftrightarrow \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < \infty$.

59. Să notăm $T((x_i)) = (T_i x_i)$. Deoarece $\sum_{i \in I} \| T_i x_i \|^2 \leqslant \sum_{i \in I} \| T_i \|^2 \, \| x_i \|^2 \leqslant$ $\leqslant \sup \| T_i \|^2 \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 = (\sup \| T_i \|^2) \, \|(x_i)\|^2$, rezultă că T este bine definit. Liniaritatea lui T este consecință a liniarității operatorilor T_i. Inegalitatea de mai sus demonstrează și continuitatea lui T. În sfîrșit, singurul operator liniar, continuu, care satisface $T|_{X_i} = T_i$ este cel de mai sus. Formulele se verifică după cum urmează:

$$\bigoplus_{i \in I} (T_i + S_i)\,((x_i)) = ((T_i + S_i)\,(x_i)) = (T_i x_i + S_i x_i) = (T_i x_i) + (S_i x_i) =$$

$$= (\bigoplus_{i \in I} T_i)\,(x_i) + (\bigoplus_{i \in I} S_i)\,(x_i); \bigoplus_{i \in I} (\lambda T_i)\,(x_i) = ((\lambda\, T_i)\,(x_i)) = \lambda(T_i x_i) =$$

$$= \lambda \bigoplus_{i \in I} T_i\,(x_i); \; < \bigoplus_{i \in I} T_i(x_i), (y_i) > = \sum_{i \in I} < T_i\, x,\, y_i > = \sum_{i \in I} < x_i,\, T_i^* y_i > =$$

$$= <(x_i),\, (T_i^* y_i) > = < (x_i),\, (\bigoplus_{i \in I} T_i^*)\,(y_i) >, \text{ deci } (\bigoplus_{i \in I} T_i)^* = \bigoplus_{i \in I} T_i^*.$$

În sfîrșit: $\bigoplus_{i \in I} T_i \circ \bigoplus_{i \in I} S_i(x_i) = \bigoplus_{i \in I} T_i(S_i x_i) = (T_i\,(S_i x_i)) = \bigoplus_{i \in I} (T_i \circ S_i)\,(x_i)$.

60. a) Dacă $|f(x, y)| \leqslant M \| x \| \, \| y \|$, fie $(x_0, y_0) \in X \times Y$ și $\varepsilon > 0$. Deoarece: $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f(x, y - y_0)| +$ $+ |f(x - x_0, y_0)| \leqslant M \| x \| \, \| y - y_0 \| + M \| x - x_0 \| \, \| y_0 \| \leqslant M \| x_0 \| \, \| y - y_0 \| +$ $+ M \| x - x_0 \| \, \| y - y_0 \| + M \| x - x_0 \| \, \| y_0 \|$, rezultă că de îndată ce $\| x - x_0 \| < \delta$ și $\| y - y_0 \| < \delta$, unde $\delta = \min \{1, \varepsilon M^{-1} \| x_0 \|^{-1}, \varepsilon M^{-1} \| y_0 \|^{-1}\}$, avem $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < 3\varepsilon$, deci f este continuă. Reciproc, să presupunem f continuă și fie $\delta > 0$ astfel încît $\| x \| < \delta$ și $\| y \| < \delta$ să implice $|f(x, y)| \leqslant 1$. Oricare ar fi $x \neq 0$ și $y \neq 0$, avem: $|f(2\delta \| x \|^{-1} \cdot x,\; 2\delta \| y \|^{-1} \cdot y)| \leqslant 1$ sau: $|f(x, y)| \leqslant 4\delta^{-2} \| x \| \, \| y \|$. Inegalitatea este evident valabilă și pentru $x = 0$ sau $y = 0$. Dacă $|f(x, y)| \leqslant M \| x \| \, \| y \|$, $\forall\, x, y \in X$, atunci, pentru $\| x \| \leqslant 1$ și $\| y \| \leqslant 1$, avem $|f(x, y)| \leqslant M$. Să mai verificăm deci că $|f(x, y)| \leqslant \|f\| \, \| x \| \, \| y \|$. Această inegalitate este evident adevărată dacă $x = 0$ sau $y = 0$. Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$ atunci este echivalentă cu: $|f(\| x \|^{-1} \cdot x,$ $\| y \|^{-1} \cdot y)| \leqslant \|f\|$. Ultima inegalitate este însă adevărată din definiția lui $\|f\|$. b) Avem: $f_T(\lambda x_1 + \mu x_2,\; y) = \langle T(\lambda x_1 + \mu x_2),\; y \rangle = \langle \lambda T x_1 + \mu T x_2,\; y \rangle =$ $= \lambda \langle T x_1, y \rangle + \mu \langle T x_2, y \rangle = \lambda f_T(x_1, y) + \mu f_T(x_2, y)$ și $f_T(x, \lambda y_1 + \mu y_2) =$ $= \langle Tx, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle Tx, y_1 \rangle + \bar{\mu} \langle Tx, y_2 \rangle = \bar{\lambda} f_T(x, y_1) + \bar{\mu} f_T(x, y_2)$, deci f_T este sesquiliniară. Apoi: $|f_T(x, y)| = |\langle Tx, y \rangle| \leqslant \| Tx \| \, \| y \| \leqslant$ $\leqslant \| T \| \, \| x \| \, \| y \|$, deci f_T este continuă și $\| f_T \| \leqslant \| T \|$. Reciproc, fie $\varepsilon > 0$, și fie x_ε cu $\| x_\varepsilon \| \leqslant 1$ și $\| Tx_\varepsilon \| \geqslant \| T \| - \varepsilon$. Avem: $\| f_T \| \geqslant |f_T(x_\varepsilon, \| Tx_\varepsilon \|^{-1} \cdot Tx_\varepsilon)| =$ $= \| Tx_\varepsilon \| \geqslant \| T \| - \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost arbitrar, deducem $\| f_T \| \geqslant \| T \|$.

c) Fie, pentru fiecare $x \in X$: $\varphi(y) = \overline{f(x, y)}$. Deoarece $\varphi(\lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{f(x, \lambda y_1 + \mu y_2)} = \overline{\lambda f(x, y_1) + \mu f(x, y_2)} = \lambda\varphi(y_1) + \mu\varphi(y_2)$, rezultă că φ este liniară. Apoi: $|\varphi(y)| = |\overline{f(x, y)}| \leqslant M \|x\| \|y\|$ arată că φ este continuă. Conform teoremei lui Riesz, există un element $u \in Y$ astfel încît $\varphi(y) = \langle y, u\rangle$, $\forall y \in Y$. Să definim $Tx = u$. Relația precedentă se scrie deci: $f(x, y) = \langle Tx, y\rangle$. Rămîne de arătat că T este liniar și continuu. Dar: $f(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda f(x_1, y) + \mu f(x_2, y) = \lambda\langle Tx_1, y\rangle + \mu\langle Tx_2, y\rangle = \langle T(\lambda x_1 + \mu x_2), y\rangle$, ceea ce arată că $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Tx_1 + \mu Tx_2$. Apoi: $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = f(x, Tx) \leqslant M\|x\| \|Tx\|$. Dacă $Tx \neq 0$, deducem: $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$, inegalitate evident valabilă și pentru $Tx = 0$. Deci $T \in L(X, Y)$.

61. Deoarece f este sesquiliniară și continuă, există $S \in L(X)$ astfel încît $f(x, y) = \langle Sx, y\rangle$. Scriind că f este pozitiv definită, obținem: $\|Sx\| \|x\| \geqslant \langle Sx, x\rangle = f(x, x) \geqslant \alpha\|x\|^2$, deci $\|Sx\| \geqslant \alpha\|x\|$. Apoi: $\langle x, S^*x\rangle = \langle Sx, x\rangle \geqslant \alpha\|x\|^2$, deci $\|S^*x\| \geqslant \alpha\|x\|$, ceea ce arată, conform exercițiului 22, că $S^{-1} \in L(X)$. Fie atunci $T = (S^{-1})^*$. Avem: $f(x, Ty) = \langle Sx, Ty\rangle = \langle x, S^*(S^{-1})^* y\rangle = \langle x, y\rangle$.

62. Deoarece $\{x_n\}$ este mărginit, pentru fiecare $m \in \mathbf{N}$, șirul $\{\langle x_n, x_m\rangle\}$ este mărginit, deci are un subșir convergent. Utilizînd procedeul diagonal, există un subșir $\{x_{n_k}\}$ astfel încît $\{\langle x_{n_k}, x_m\rangle\}$ să fie convergent, pentru fiecare $m \in \mathbf{N}$. Datorită liniarității și continuității produsului scalar, $\{\langle x_{n_k}, x\rangle\}$ converge, oricare ar fi x din subspațiul liniar închis X_1, generat de $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Deoarece $X = X_1 \oplus X_1^{\perp}$, rezultă că $\{\langle x_{n_k}, x\rangle\}$ este convergent pentru orice $x \in X$. Este evident că $x \to \lim_{k\to\infty} \langle x, x_{n_k}\rangle$ este o funcțională liniară și continuă pe X. Din teorema lui Riesz, există $x_0 \in X$ astfel încît $\lim_{k\to\infty} \langle x, x_{n_k} - x_0\rangle = 0$, oricare ar fi $x \in X$. Dacă notăm $u_k = x_{n_k} - x_0$, putem extrage un subșir $\{u_{k_p}\}$ astfel încît: $|\langle u_{k_1}, u_{k_{p+1}}\rangle| \leqslant p^{-1}$; ... $|\langle u_{k_p}, u_{k_{p+1}}\rangle| \leqslant p^{-1}$, $\forall p \in \mathbf{N}$. Atunci:

$$\left\| \frac{u_{k_1} + \ldots + u_{k_p}}{p} \right\| \leqslant \frac{1}{p^2}\left[pM + 2\left(1 + 2\cdot\frac{1}{2} + \ldots + (p-1)\frac{1}{p-1}\right)\right] \leqslant \frac{M^2+2}{p}$$

(unde M este astfel încît $\|u_k\| \leqslant M$, $\forall k \in \mathbf{N}$). Ultima relație demonstrează tocmai afirmația din enunț.

63. Fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ și $T^*y = (z_1, \ldots, z_n)$. Relația $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ devine: $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right)\overline{y}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{z}_i$ sau: $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{y}_i\right)x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{z}_i$. Deoarece această relație are loc pentru orice $x \in \Gamma^n$, luînd $x = e_k$, se obține $z_k = \sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_{ik}y_i$, deci $T^*y = (\overline{\alpha}_{ji})(y_i)$, ceea ce arată că matricea operatorului T^* în baza canonică este $t_A = (\overline{\alpha}_{ji})$.

64. Fie $x = (x_n) \in l^2$ și să presupunem că $x \in A \cap B$. Din $x \in A$ urmează $x_{2n-1} = 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Deoarece $\{\| b_n \|^{-1} \cdot b_n\}$ este o bază ortonormală în B, rezultă că $x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, \| b_n \|^{-1} \cdot b_n > \| b_n \|^{-1} \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \| b_n \|^{-2} x_{2n} \cdot b_n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \| b_n \|^{-2} x_{2n} \cdot e_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \| b_n \|^{-2} (n+1)^{-1} x_{2n} \cdot e_{2n-1}$. Însă $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} e_{2n}$, ceea ce implică $\sum_{n=1}^{\infty} \| b_n \|^{-2} (n+1)^{-1} x_{2n} \cdot e_{2n-1} = 0$, adică $x_{2n} = 0, \forall\, n \in \mathbf{N}$. Deci $x = 0$, adică $A \cap B = \{0\}$. Subspațiul $X_1 = A + B$ este dens în X, deoarece $e_n \in A + B$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Să mai arătăm că $A + B \neq X$. După cum se observă imediat, forma generală a unui element din $A + B$ este $(1/2 x_1, x_1 + y_1, 1/3 x_2, x_2 + y_2, \ldots)$, unde $(x_n), (y_n) \in l^2$. Să arătăm că: $(1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, \ldots) \notin A + B$. În adevăr, ar trebui ca $1/2 x_1 = 1$; $1/3 x_2 = 1/2$; adică $x_n = (n+1) n^{-1}$ ceea ce ar contrazice $x \in l^2$.

65. Să presupunem X_1 dens. Dacă $x \perp X_1$, atunci $x \perp \overline{X}_1$, datorită continuității produsului scalar, ceea ce implică $x = 0$. Reciproc, să presupunem X_1 total. $\overline{X}_1$ fiind subspațiu liniar închis în X, avem: $X = \overline{X}_1 \oplus \overline{X}_1^{\perp}$. Fie $x \in X_1^{\perp}$. Avem $x \perp X_1$ și din ipoteză urmează $x = 0$, adică $\overline{X}_1^{\perp} = \{0\}$. Deducem $X = \overline{X}_1$, deci X_1 este dens în X.

66. Inegalitatea $\| T^2 \| \leqslant \| T \| \| T \| = \| T \|^2$ este adevărată fără nici o ipoteză suplimentară. Oricare ar fi $x \in X$, avem $\| Tx \|^2 = < Tx, Tx > = < T^* Tx, x > \leqslant \| T^* Tx \| \| x \| \leqslant \| T^* T \| \| x \|^2$, de unde $\| T \|^2 \leqslant \| T^* T \|$.

67. Fie $B = \{x \in X \mid \| x \| \leqslant 1\}$. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $y_1, \ldots, y_n$ din $T(B)$ astfel încît, oricare ar fi $y \in T(B)$, există k încît: $\| y - y_k \| < \varepsilon$. Fie Y_1 subspațiul liniar generat de $\{y_1, \ldots, y_n\} \cdot Y_1$ este de dimensiune finită, deci închis. Dacă P_1 este proiectorul pe Y_1, $P_1 T$ este de rang finit. În plus oricare ar fi $x \in B$, avem: $\| Tx - P_1(Tx) \| < \varepsilon$, ceea ce arată că $\| T - P_1 T \| \leqslant \varepsilon$. Șirul căutat se obține pentru $\varepsilon = n^{-1}$.

68. f fiind olomorfă în $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, fie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ dezvoltarea Taylor, valabilă pentru $|z| < 1$ (conform [2]). Avem: $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta =$

$= (2\pi)^{-1} \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_n \bar{c}_m r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$, de unde: $\| f \| =$

$= \sup_{0<r<1} \left[(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right]^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2}$, deci $(c_n) \in l^2$. Reciproc, oricare ar fi $(c_n) \in l^2$ atunci $f(z) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$ este bine definită și olomorfă pentru $|z| < 1$, (după cum rezultă din $\left| \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n \right| \leqslant \left(\sum_{n=k}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=k}^{\infty} r^{2n} \right)^{1/2}$.

Cu acestea, $H - L^2$ este izomorf izometric cu l^2, ceea ce dovedește toate afirmațiile.

69. Fie, pentru comoditate, $T_{mn} = T_m - T_n$. Dacă $m \geq n$, atunci $T_{mn} \geq 0$. Folosind exercițiul 48, deducem $\| T_{mn}x \|^4 \leq < T_{mn}x, x > \| x \|^2$, $\forall x \in X$. Dar prin ipoteză, șirul $< T_n x, x >$ este crescător și majorat de $\| x \|^2$, deci convergent. Rezultă că șirul $< T_{mn} x, x >$ tinde la 0, deci $\{T_n x\}$ este șir Cauchy. Există deci $Tx \in X$ astfel încît $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$. Din principiul mărginirii uniforme $T \in L(X)$ și $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

IX. TEORIE SPECTRALĂ

1. $P \neq 0$ arată că $P(X) \neq \{0\}$, iar $P \neq 1_X$ arată că $\operatorname{Ker} P \neq \{0\}$. Deci există $x \neq 0$ astfel încît $Px = x$; și $y \neq 0$ astfel încît $Py = 0$, ceea ce arată că 0 și 1 sînt valori proprii pentru P. Deci $\{0, 1\} \subseteq \sigma_p(P) \subseteq \sigma(P)$. Deoarece $R(\lambda; P) \in L(X)$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$, este suficient să mai verificăm relațiile: $R(\lambda; P)(\lambda 1_X - P) = (\lambda 1_X - P)R(\lambda; P) = 1_X$. Însă:

$$R(\lambda; P)(\lambda 1_X - P) = (\lambda^{-1} 1_X + \lambda^{-1}(\lambda - 1)^{-1} P)(\lambda 1_X - P) = 1_X - \lambda^{-1} P + (\lambda - 1)^{-1} P - \lambda^{-1}(\lambda - 1)^{-1} P^2 = 1_X.$$

A doua relație se stabilește analog.

2. a) Fie $\lambda \in \sigma_p(T)$, deci există $x \neq 0$ astfel încît $Tx = \lambda x$; adică $x_{n+1} = \lambda x_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Urmează $x_{n+1} = \lambda^n x_1$, cu x_1 arbitrar. Punînd condiția ca $x \in l^2$, urmează $|\lambda| < 1$. Deci $\sigma_p(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| < 1\}$. Reciproc, oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{C}$, cu $|\lambda| < 1$, avem: $x = (1, \lambda, ..., \lambda^{n-1}, ...) \in l^2$, iar $Tx = \lambda x$, ceea ce arată că $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| < 1\}$. Deoarece $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leq \| T \|\}$, iar $\sigma(T)$ este mulțime închisă și $\| T \| = 1$, deducem $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$. Fie acum $\lambda \in \sigma_p(T^*)$, deci există $x \neq 0$ astfel încît $T^* x = \lambda x$, adică $x_1 = 0$, $\lambda x_{n+1} = x_n$, $\forall n \geq 1$. Din prima egalitate urmează: fie $\lambda = 0$, în care caz din următoarele egalități $x_n = \lambda x_{n+1} = 0$, deci $x = 0$; fie $x_1 = 0$ și atunci prin recurență din nou $x = 0$. Deci $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. Deoarece $(\lambda 1_X - T^*)^{-1}$ există dacă și numai dacă $(\bar{\lambda} 1_X - T)^{-1}$ există, deducem $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$. b) Fie $u = (u_1, ..., u_n, ...) \in l^2$ un element ortogonal pe $(\lambda 1_X - T^*)(l^2)$. Deci $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n \bar{u}_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{u}_{n+1}$, oricare ar fi $x \in l^2$. Dacă $|\lambda| < 1$, atunci $u_n = \bar{\lambda}^{n-1}$ satisface; deci există $u \in l^2 \setminus \{0\}$ astfel încît $u \perp (\lambda 1_X - T^*)(l^2)$, ceea ce arată că $(\lambda 1_X - T^*)(l^2)$ nu este dens în l^2. Dacă $|\lambda| \geq 1$, relația $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda x_n \bar{u}_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{u}_{n+1}$ și $u \in l^2$ implică $u = 0$, deci $(\lambda 1_X - T^*)(l^2)$ este dens în l^2. Dacă $(\lambda 1_X - T^*)(l^2) = l^2$, urmează că $\lambda 1_X - T^*$ este o bijecție; conform principiului aplicației deschise, $(\lambda 1_X - T^*)^{-1} \in L(l^2)$, ceea ce nu poate avea loc decît dacă $|\lambda| > 1$. Dacă $|\lambda| > 1 = \| T^* \|$, avem $R(\lambda; T^*) = \lambda^{-1} 1_X + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} (T^*)^n$, de unde $\| (\lambda 1_X - T^*)^{-1} \| = \| R(\lambda; T^*) \| \leq |\lambda|^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{-(n+1)} = (|\lambda| - 1)^{-1}$. c) Dacă T^* ar fi compact, și T ar fi compact

(conform exercițiului VII.32). Dar T are o infinitate nenumărabilă de valori proprii, deci nu poate fi compact.

3. Faptul că $T \in L(l^2)$ rezultă din exercițiul VIII.44 și din faptul că mulțimea K este mărginită. Apoi $Te_n = \rho_n e_n$, deci $\rho_n \in \sigma_p(T)$. Reciproc, dacă $Tx = \rho x$, urmează $(\rho - \rho_n)(x_n) = 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, deci $x \neq 0$ implică $\rho = \rho_n$ pentru cel puțin un $n \in \mathbf{N}$. Deci $\sigma_p(T) = \{\rho_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Deoarece $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$, iar $\sigma(T)$ este mulțime închisă, $K \subseteq \sigma(T)$. Dacă $\rho \notin K$, fie $d = d(\rho, K) > 0$. Avem: $(\rho 1_X - T)(x) = ((\rho - \rho_n)x_n)$, deci $(\rho 1_X - T)^{-1}(x) = ((\rho - \rho_n)^{-1} x_n)$. Deoarece $(\rho - \rho_n)^{-1} \leqslant d^{-1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, deducem (conform exercițiului VIII.44) că $\rho \notin \sigma(T)$. Rezultă $\sigma(T) = K$. Fie acum $\rho \in K \setminus \{\rho_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, deci $(\rho 1_X - T)$ este injectiv. Dacă ar fi surjectiv, din principiul aplicației deschise ar urma $(\rho 1_X - T)^{-1} \in L(l^2)$, contradicție. Deci $(\rho 1_X - T)(l^2) \neq l^2$. Fie $u \in l^2$ astfel încît $u \perp (\rho 1_X - T)(l^2)$. Aceasta înseamnă: $\sum_{n=1}^{\infty} (\rho - \rho_n) x_n \overline{u_n} = 0$, $\forall\, x \in l^2$. Deoarece $\rho - \rho_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, urmează $u = 0$. Deducem că $(\rho 1_X - T)(l^2)$ este dens în l^2.

4. a) Este suficient să arătăm că dacă $(1 - ST)^{-1} \in L(X)$ atunci și $(1 - TS)^{-1} \in L(X)$. Notînd $W = (1 - ST)^{-1}$, avem $WST = W - 1 = STW$. Arătăm că $(1 + STW)$ este inversul lui $(1 - TS)$:

$$(1 - TS)(1 + TWS) = 1 + TWS - TS + TSTWS = 1 + TWS - TS - T(W - 1)S = 1,$$

$$(1 + TWS)(1 - TS) = 1 - TS + TWS - TWSTS = 1 - TS + TWS - T(W - 1)S = 1.$$

b) Dacă T este operatorul din exercițiul 2, iar $S = T^*$, atunci $TSx = T((0, x_1, \ldots)) = (x_1, \ldots)$ deci $TS = 1$ și $\sigma(TS) = \{1\}$. Apoi $STx = T^*Tx = T^*((x_2, x_3, \ldots)) = (0, x_2, \ldots)$ deci $STe_1 = 0$, ceea ce arată că $0 \in \sigma(ST)$. c) Fie $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma_p(TS)$, deci există $x \neq 0$ astfel încît $TSx = \lambda x$. Dacă $Sx = 0$, ar urma $\lambda x = 0$, absurd. Deci $Sx \neq 0$. Aplicînd S în ambii membri ai egalității, rezultă: $S(TSx) = S(\lambda x)$, adică $ST(Sx) = \lambda(Sx)$, ceea ce arată că $\lambda \in \sigma_p(ST)$. Același exemplu ca mai sus arată că $\sigma_p(TS) \neq \sigma_p(ST)$.

5. Avem: $TR(\lambda; T)(\lambda 1_X - T) = T$ și $R(\lambda; T)T(\lambda 1_X - T) = R(\lambda; T)(\lambda T - T^2) = R(\lambda; T)(\lambda 1_X - T)T = T$, deci $TR(\lambda; T)(\lambda 1_X - T) = R(\lambda; T)T(\lambda 1_X - T)$. Înmulțind la dreapta cu $R(\lambda; T) = (\lambda 1_X - T)^{-1}$, se obține egalitatea cerută.

6. a) $(\lambda 1_X - T^*)^{-1}$ există dacă și numai dacă există $(\lambda 1_X - T)^{*-1} = (\overline{\lambda} 1_X - T^*)^{-1}$. Adică $\lambda \in \rho(T)$ dacă și numai dacă $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$, ceea ce demonstrează egalitatea din enunț. b) Deoarece $T^{-1} \in L(X)$, rezultă $0 \notin \sigma(T)$. Pentru $\lambda \neq 0$, avem: $\lambda 1_X - T = -\lambda T(\lambda^{-1} 1_X - T^{-1})$, ceea ce arată că $(\lambda 1_X - T)^{-1} \in L(X)$ dacă și numai dacă $(\lambda^{-1} 1_X - T^{-1})^{-1} \in L(X)$. Deci $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \rho(T^{-1})$. c) Arătăm întîi că, pentru $Q \in \mathbf{C}[X]$, $Q(T)$ este inversabil dacă și numai dacă $Q(\lambda) \neq 0$, $\forall\, \lambda \in \sigma(T)$. Dacă scriem $Q(X) = a_0(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$, atunci $Q(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in \sigma(T)$ implică $\lambda_i \notin \sigma(T)$, $i = 1, \ldots, n$. Rezultă că $(\lambda_i 1_X - T)^{-1} \in L(X)$, $i = 1, \ldots, n$. Deci $Q(T)^{-1} \in L(X)$. Reciproc, dacă $Q(T)$ este inversabil, fie $S \in L(X)$ astfel încît $Q(T)S = SQ(T) = 1_X$. Atunci: $(\lambda_1 1_X - T)a_0(\lambda_2 1_X - T) \ldots (\lambda_n 1_X - T)S = 1_X$, sau: $a_0(\lambda_2 1_X - T) \ldots (\lambda_n 1_X - T)S(\lambda_1 1_X - T) = 1_X$, ceea ce arată că $(\lambda_1 1_X - T)$ este inversabil, deci $\lambda_i \notin \sigma(T)$, $i = 1, \ldots n$. Pentru a demonstra afirmația din enunț, fie $P \in \mathbf{C}[X]$ și $\lambda \in \mathbf{C}$. Notînd $Q = P - \lambda$, avem, conform celor de mai sus: $\lambda \in \sigma(P(T)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(T) - \lambda 1_X$ nu este inversabil $\Leftrightarrow Q(T)$ nu este inversabil $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_0 \in \sigma(T)$, astfel încît $Q(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow \exists\, \lambda_0 \in \sigma(T)$, astfel încît $P(\lambda_0) = \lambda_0 \Leftrightarrow \lambda \in \{P(\alpha) \mid \alpha \in \sigma(T)\}$.

7. a) Notînd $\alpha_n = \| T^n \|$, avem $\alpha_{n+m} \leqslant \alpha_n \cdot \alpha_m$. Dacă există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $\alpha_n = 0$, atunci $\alpha_{n+m} = 0$, deci afirmația este dovedită. Fie deci $\alpha_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ și să fixăm $n_0 \in \mathbf{N}$. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, fie $r \in \mathbf{N}$ astfel încît $0 \leqslant r \leqslant n_0 - 1$ și $n = n_0 q + r$, cu $q \in \mathbf{N}$. Avem: $\alpha_n = \alpha_{n_0 q + r} \leqslant \alpha_{n_0}^q \cdot \alpha_r$, de unde $\alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_{n_0}^{q/n} \cdot \alpha_r^{1/n}$. Membrul doi tinde la $\alpha_{n_0}^{1/n_0}$, deci $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_{n_0}^{1/n_0}$. Cum n_0 a fost arbitrar, deducem: $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \inf \{\alpha_n^{1/n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Urmează că șirul $\{\alpha_n^{1/n}\}$ este convergent, iar $\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{1/n} = \inf_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n^{1/n}$. b) Inegalitatea $r(T) \leqslant \| T \|$ este evidentă din definiție. Dacă T este normal, din exercițiul VIII.66 avem $\| T^2 \| = \| T \|^2$, de unde, prin recurență: $\| T^{2^n} \| = \| T \|^{2^n}$ și deci : $r(T) = \lim_{n\to\infty} \| T^{2^n} \|^{1/2^n} = \| T \|$.

8. Dacă $\lambda \in \sigma(T)$ atunci, conform exercițiului 6 c), $\lambda^n \in \sigma(T^n)$, ceea ce arată că $|\lambda^n| \leqslant \| T^n \|$ sau $|\lambda| \leqslant \| T^n \|^{1/n}$. Rezultă că $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leqslant r(T)\}$. Invers, fie $\alpha > 0$ astfel încît $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leqslant \alpha\}$. Deoarece $1_X - \lambda T = \lambda(\lambda^{-1} 1_X - T)$, deducem că $(1_X - \lambda T)^{-1} \in L(X)$, oricare ar fi $|\lambda| < \alpha^{-1}$. Să introducem, $x, y \in X$ fiind fixați, funcțiile: $f_{x,y}(\lambda) = <(1_X - \lambda T)^{-1} x, y>$. Evident, $f_{x,y}$ este olomorfă. Pentru $|\lambda| < \| T \|^{-1}$ avem: $f_{x,y}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} <T^n x, y> \cdot \lambda^n$. Din teoria funcțiilor olomorfe deducem că seria precedentă are raza de convergență $\geqslant \alpha^{-1}$. Fie $r < \alpha^{-1}$ fixat. Avem: $M_{x,y} = \sup_{|\lambda|=r} |f_{x,y}(\lambda)| \leqslant N \| x \| \| y \|$, unde $N = \sup_{|\lambda|=r} \| (1_X - \lambda T)^{-1} \|$. Integrînd pe cercul $\gamma = \{\lambda \mid |\lambda| = r\}$, obținem: $\int_\gamma \lambda^{-n-1} f_{x,y}(\lambda) d\lambda = <T^n x, y> \cdot 2i\pi$, de unde $2\pi |<T^n x, y>| \leqslant r^{-n-1} M_{x,y} 2\pi r$. Din inegalitățile lui Cauchy deducem $|<T^n x, y>| \leqslant M_{x,y} r^n \leqslant N r^{-n} \| x \| \| y \|$, adică $\| T^n \| \leqslant N r^{-n}$, sau $\| T^n \|^{1/n} \leqslant N^{1/n} r^{-1}$. Urmează $r(T) \leqslant r^{-1} \cdot r$ fiind arbitrar, găsim $r(T) \leqslant \alpha$.

9. a) Să presupunem întîi că T este de rang finit. $(\mathrm{Ker}\ T)^\perp$ este deci de dimensiune finită. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază algebrică în $(\mathrm{Ker}\ T)^\perp$. Pentru orice $x, y \in X$, avem: $<Tx, y> = <T\left(\sum_{i=1}^n <x, e_i> e_i\right), y> = \sum_{i=1}^n <x, e_i> \cdot <Te_i, y>$. Fiecare din funcțiile: $x \to <x, e_i>$ și $y \to <Te_i, y>$, fiind slab continue pe X, rezultă că $(x, y) \to <Tx, y>$ este slab continuă pe $X \times X$. Fie acum T compact. Deoarece T este limita uniformă a unui șir de operatori de rang finit (conform exercițiului VIII.67), funcția $(x, y) \to <Tx, y>$ este slab continuă pe $B \times B$, ca limită uniformă de funcții slab continue. b) Deoarece $\| T \| = \sup \{|<Tx, x>| \mid \| x \| \leqslant 1\}$, B este slab compactă, iar aplicația $x \to <Tx, x>$ este slab continuă, deducem existența unui $x_0 \in B$, astfel încît $\| T \| = |<Tx_0, x_0>|$. Dar $|<Tx_0, x_0>| \leqslant \| Tx_0 \| \cdot \| x_0 \| \leqslant \| T \| \cdot \| x_0 \|^2 \leqslant \| T \|$, ceea ce arată că $|<Tx_0, x_0>| = \| Tx_0 \| \cdot \| x_0 \|$. În mod necesar există deci $\lambda \in \mathbf{C}$ astfel încît $Tx_0 = \lambda x_0$. Se constată imediat că $|\lambda| = \| T \|$. c) Fie, pentru fiecare valoare proprie λ a lui T: $X_\lambda = \{x \in X \mid Tx = \lambda x\}$, și să notăm G cel mai mic subspațiu liniar închis care conține orice X_λ, $T|$ fiind normal. $T(G^\perp) \subseteq G^\perp$. În plus, este evident că $T|_{G^\perp}$

nu are nici un vector propriu. Aceasta însă implică, conform b), $G^{\perp} = \{0\}$, deci $G = X$. Baza ortonormală căutată se obține alegînd cîte o bază ortonormală în fiecare X_λ și folosind faptul că, dacă $\lambda \neq \mu$, subspațiile X_λ și X_μ sînt ortogonale.

10. a) Dacă notăm $S = r(\lambda_0 1_X + T)$, se verifică fără dificultate că $\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda - \lambda_0| < r\}$, iar $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda - \lambda_0| \leqslant r\}$. b) Să notăm $\{e_{mn}\}_{(m,\, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ o bază ortonormală în X, iar X_n subspațiul liniar închis generat de $\{e_{mn} \mid m \in \mathbf{N}\}$. Se constată ușor că $X = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} X_n$. c) Fie $x \in X$, $x \neq 0$, astfel încît $Tx = \lambda x$; deci $T_i x_i = \lambda x_i$, $\forall\, i \in I$. Deoarece $\exists\, i \in I$ astfel încît $x_i \neq 0$, urmează $\lambda \in \sigma_p(T_i)$, deci $\sigma_p(T) \subseteq \bigcup_{i \in I} \sigma_p(T_i)$. Reciproc, dacă există $i \in I$ și $x_i \neq 0$, $x_i \in X_i$ astfel încît $T_i x_i = \lambda x_i$, atunci $Tx = \lambda x$, unde $x = (x_j)$, cu $x_j = 0$ dacă $j \neq i$. Fie acum $\Omega \subseteq \mathbf{C}$, deschis, relativ compact. Există un șir de discuri deschise Ω_n, astfel încît $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \Omega_n$. Fie $S_n \in L(X_n)$ operatorul care, conform a), satisface: $\sigma_p(S_n) = \Omega_n$ și $\sigma(S_n) = \overline{\Omega}_n$. Deoarece Ω este mulțime mărginită, exercițiul VIII.59 implică existența operatorului $S = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} S_n$. Din c) avem $\sigma_p(S) = \Omega$. Urmează $\overline{\Omega} \subseteq \sigma(S)$. Dacă $\lambda \notin \overline{\Omega}$, deducem $\lambda \notin \sigma(S_n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, deci: $(\lambda 1_X - S_n)^{-1} \in L(X_n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Se constată fără dificultate că $(\lambda 1_X - S)^{-1} = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (\lambda 1_{X_n} - S_n)^{-1}$, deci $\lambda \notin \sigma(S)$, ceea ce demonstrează că $\sigma(S) = \overline{\Omega}$.

11. a) Avem: $\| Tx \| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n+1}{n} x_{n+1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \| x \|$. Liniaritatea fiind evidentă, rezultă că T este continuu și $\| T \| \leqslant 2$. În sfîrșit, $\| T \| \geqslant \| Te_2 \| = \| 2e_1 \| = 2$ arată că $\| T \| = 2$. b) Dacă $Tx = \lambda x$, urmează $\frac{n+1}{n} x_{n+1} = \lambda x_n$, de unde, x_1 fiind arbitrar, $x_n = \lambda^n n^{-1} x_1$. Punînd condiția ca x astfel obținut să fie din l^2, obținem $|\lambda| < 1$. c) Prin recurență se constată că $T^k x = \left(\frac{k}{1} x_k, \frac{k+1}{2} x_{k+1}, \ldots \right)$, deci, $\| T^k \| = k$. Conform exercițiului 8, avem $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. Pe de altă parte, $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$, ceea ce demonstrează egalitatea propusă.

12. a) T este compact, deci T^*T este compact. Apoi $S^* = (T^*T)^* = T^*T = S$, deci S este autoadjunct. Dacă $x \neq 0$ și $Sx = \lambda x$, atunci: $\| Tx \|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle Sx, Sx \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$, deci $\lambda \geqslant 0$. b) Aplicînd exercițiul 9, deducem existența unei baze ortonormale $\{e_i\}_{i \in I}$ în X, astfel încît $Se_i = \lambda_{n_i} e_i$. Urmează: $N(T)^2 = \sum_{i \in I} \| Te_i \|^2 = \sum_{i \in I} \langle Te_i, Te_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle Se_i, e_i \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

13. a) Oricare ar fi $f, g \in L^2([0, 1])$, putem scrie:

$$\langle v_K f, g \rangle = \int_0^1 \left[\int_0^1 K(t, t') f(t')\, dt' \right] \overline{g(t)}\, dt = \int_0^1 \int_0^1 K(t, t') f(t') \overline{g(t)}\, dt'\, dt = \int_0^1 f(t') \cdot \left[\int_0^1 \overline{K(t, t')}\, g(t)\, dt \right] dt' = \langle f, v_K^* g \rangle,$$

de unde $(v_K^* g)(t') = \int_0^1 \overline{K(t, t')}\, g(t)\, dt$. Dacă $K(t, t') = \overline{K(t', t)}$, evident $v_K = v_K^*$. b) Deoarece $\{\varphi_n\}$ este o bază ortonormală, $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, seria fiind convergentă în $L^2([0, 1])$. Deducem: $v_K f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_K(\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi_n$, seria fiind convergentă în $L^2([0, 1])$. c) Dacă

$\lambda \neq \lambda_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, rezultă că $(\lambda 1_X - v_K)^{-1}$ există, deci ecuația $v_K g - \lambda g = f$ are o soluție unică: $g = (\lambda 1_X - v_K)^{-1} f$. Avem: $g = (\lambda 1_X - v_K)^{-1} f = (\lambda 1_X - v_K)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n\right) = -\lambda^{-1}\left(f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} c_n \varphi_n = -\lambda^{-1} f + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^{-1} (\lambda_n - \lambda)^{-1} c_n \varphi_n$ seriile fiind convergente în $L^2([0, 1])$. d) Din demonstrația exercițiului VIII.56 se știe că $\varphi_{mn}(t, t') = \varphi_m(t)\,\overline{\varphi_n(t')}$ este o bază ortonormală în $L^2([0, 1]\times[0, 1])$, deci, notînd $\mu_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 K(t, t')\,\varphi_{mn}(t, t')\,dt\,dt'$, avem: $\sum_{m,n=1}^{\infty} |\mu_{mn}|^2 < \infty$ și $K = \sum_{m,n=1}^{\infty} \mu_{mn}\varphi_{mn}$, seria fiind convergentă în $L^2([0, 1]\times[0, 1])$. Dar: $\mu_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 K(t, t')\,\varphi_m(t)\,\overline{\varphi_n(t')}\,dt\,dt' = \int_0^1 (v_K \varphi_m)(t')\,\overline{\varphi_n(t')}\,dt' = \langle v_K \varphi_m, \varphi_n\rangle = \langle \lambda_m \varphi_m, \varphi_n\rangle = \delta_{mn}\lambda_m$. Rezultă că $\mu_{nn} = \lambda_n$, iar $\mu_{mn} = 0$ dacă $m \neq n$. Deci $K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_{nn}$.

14. a) Pentru $u \in [0, 1]$, fie $K_u(t) = K(t, u)$. Deoarece K este funcție continuă, deci uniform continuă, aplicația $u \to K_u$, definită pe $[0, 1]$ cu valori în $\mathcal{C}([0, 1])$, rezultă continuă. Deci $\{K_u \mid u \in [0, 1]\}$ este o mulțime compactă în $\mathcal{C}([0, 1])$ și există $M = \sup\{\|K_u\| \mid u \in [0, 1]\}$. Deoarece $v_K(f)(u) = \int_0^1 K_u(t)\overline{f(t)}\,dt$, deducem: $\sup_{u\in[0,1]} |v_K(f)(u)| \leqslant M\|f\|$, oricare ar fi $f \in L^2([0, 1])$, demonstrînd astfel toate afirmațiile. b) Deoarece $v_K \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, iar $v_K \varphi_n$ este continuă, rezultă că φ_n este continuă, dacă $\lambda_n \neq 0$. Cu cele de mai sus avem:

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\sum_{n=p}^{q} \lambda_n c_n \varphi_n(t)\right| \leqslant M \left\|\sum_{n=p}^{q} c_n \varphi_n\right\|,$$

iar $\left\|\sum_{n=p}^{q} c_n \varphi_n\right\| \to 0$ cînd $p, q \to +\infty$. Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi_n$ converge uniform pe $[0, 1]$. În particular, pentru fiecare $t_0 \in [0, 1]$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi_n(t_0)$ converge. Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \varphi_n$ converge în $L^2([0, 1])$ independent de ordinea termenilor, același lucru este valabil și pentru $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi_n(t_0)$, care rezultă astfel absolut convergentă.

15. a) Din exercițiul 6 c) avem $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$. Din exercițiul VIII.43, $P(T)$ rezultă normal. Cu exercițiile 7 și 8 găsim: $\|P(T)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(P(T))} |\lambda| = \sup_{\lambda\in P(\sigma(T))} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |P(\lambda)|$. b) Faptul că aplicația φ este unică rezultă astfel: dacă φ' are aceleași proprietăți, atunci $\varphi(P) = \varphi'(P)$ pentru orice polinom $P \in \mathbf{C}[X]$. Orice $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ fiind limita uniformă a unui șir de polinoame, iar φ și φ' fiind continue, urmează $\varphi = \varphi'$. Pentru existență, începem prin a defini $\varphi(P) = P(T)$, pentru orice polinom $P \in \mathbf{C}[X]$. Se verifică fără dificultate că φ este bine definită și că este omomorfism de algebre cu unitate.

În plus, $\varphi(1_{\mathcal{C}}) = T$ prin construcție. Conform a), $\| \varphi(P) \| = \| P \|$ (P fiind considerat în $\mathcal{C}(\sigma(T))$). De aici deducem că φ posedă o prelungire prin continuitate la $\mathcal{C}(\sigma(T))$. Proprietatea de a fi omomorfism de algebre se conservă evident prin prelungire. c) Dacă f este polinom, atunci $\|f(T)\| = \|f\|$ rezultă din a). Egalitatea în general urmează prin trecere la limită. La fel, egalitatea $f(T)^* = \bar{f}(T)$ este imediată pentru cazul f polinom, iar, în general, se obține prin trecere la limită. În sfîrșit: $f(T)f(T)^* = f(T)\bar{f}(T) = (f\bar{f})(T) = (\bar{f}f)(T) = \bar{f}(T)f(T) = f(T)^* f(T)$ și deci $f(T)$ este operator normal.

16. Pentru ca $g(f(T))$ să fie definit, este suficient ca $\sigma(f(T)) \subseteq [c, d]$. Această incluziune este însă o consecință a exercițiului 17. Rămîne să verificăm egalitatea $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$. Fie $P_n \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît $P_n \to g$ uniform pe $[c, d]$. Deoarece $f(T)^n = f^n(T)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, rezultă că $P_n(f(T)) = (P_n \circ f)(T)$. Deoarece $P_n \circ f$ converge uniform la $g \circ f$ pe $[a, b]$, prin trecere la limită se obține relația propusă.

17. Fie $\lambda_0 \in \sigma(T)$. Dacă $P_n \in \mathbf{C}[X]$ este un șir uniform convergent la f pe $\sigma(T)$, din exercițiul 6 rezultă că fiecare operator $P_n(\lambda_0)1_X - P_n(T)$ este neinversabil. Dar $P_n(\lambda_0)1_X - P_n(T)$ converge în normă la $f(\lambda_0)1_X - f(T)$, care rezultă astfel neinversabil, deci $f(\lambda_0) \in \sigma(f(T))$, adică $f(\sigma(T)) \subseteq \sigma(f(T))$. Fie acum $\mu \notin f(\sigma(T))$. Rezultă $f(\lambda) - \mu \neq 0$, $\forall \lambda \in \sigma(T)$. $\sigma(T)$ fiind compact, iar f continuă, urmează că $\|g\| \geqslant \alpha > 0$, unde $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$. Deci $g^2 \geqslant \alpha^2$ pe $\sigma(T)$, ceea ce arată că $g(T)^2$ este mărginit inferior. Urmează că $g(T)$ este inversabil, deci $\mu \notin \sigma(f(T))$. Fie $\lambda \in f(\sigma_p(T))$, deci există $\mu \in \sigma_p(T)$ încît $\lambda = f(\mu)$. Există $x \neq 0$ astfel încît $Tx = \mu x$. Pentru orice polinom $P \in \mathbf{C}[X]$, avem, conform exercițiului 6, $P(T)x = P(\mu)x$. Prin trecere la limită, $f(T)x = \lambda x$, ceea ce arată că $\lambda \in \sigma_p(f(T))$.

18. Fie T compact și să presupunem $f(0) = 0$. Există deci $P_n \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît $P_n(0) = 0$ și $P_n \to f$ uniform pe $\sigma(T)$. Rezultă $P_n(T) = T\left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k\right)$ compact, deci $f(T)$ este compact ca limita unui șir de operatori compacți. Reciproc, să presupunem că T este compact, $f(T)$ este compact, iar X este de dimensiune infinită. Deoarece $0 \in \sigma_p(T)$, din exercițiul 17 urmează $f(0) \in \sigma_p(f(T))$. Însă $Tx = 0$ implică $f(T)x = f(0)x$. Ker T fiind de dimensiune infinită, deducem $f(0) = 0$.

19. Fie $P \in \mathbf{C}[X]$. Avem: $P(T)e_i = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k\right) e_i = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha_i^k e_i = P(\alpha_i)e_i$, $\forall i \in I$. Prin trecere la limită se obține: $f(T)e_i = f(\alpha_i)e_i$, deci $f(T)$ este asociat familiei $\{f(\alpha_i)\}$.

20. a) Deoarece $\int_0^1 |tf(t)|^2 dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2 dt$, rezultă că T este bine definit. Liniaritatea fiind evidentă, inegalitatea precedentă arată continuitatea lui T, precum și $\|T\| \leqslant 1$. b) Dacă $\lambda f(t) - (Tf)(t) = g(t)$, deducem $g(t) = (\lambda - t)^{-1} f(t)$. Pentru ca $g \in L^2([0, 1])$, este necesar și suficient ca $\lambda \notin [0, 1]$, deci $\sigma(T) = [0, 1]$. Dacă $Tf = \lambda f$, urmează $(\lambda - t)f(t) = 0$, ceea ce implică $f = 0$ în $L^2([0, 1])$, deci $\sigma_p(T) = \emptyset$. c) Fie $P \in \mathbf{C}[X]$: $P(T)(g)(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k g(t) = P(T)\, g(t)$. Trecînd la limită, se obține relația propusă. d) Fie $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$, definită prin $f(\lambda) = \alpha$, $\forall \lambda \in \sigma(T)$. Deci $f(T)\,(g)\,(t) = \alpha g(t)$. Rezultă imediat că $\sigma_p(f(T)) = \{\alpha\}$. Deoarece $\sigma_p(T) = \emptyset$, incluziunea $f(\sigma_p(T)) \subset \sigma_p(f(T))$ este în acest caz strictă.

21. a $\Rightarrow$ b. Fie $\lambda \in \mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$ și $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Atunci: $\| (\lambda 1_X - T)x \|^2 = \langle \lambda_1 x + i\lambda_2 x - Tx, \lambda_1 x + i\lambda_2 x - Tx \rangle = \lambda_1^2 \| x \|^2 - 2\lambda_1 \langle Tx, x \rangle + \| Tx \|^2 + \lambda_2^2 \| x \|^2$. Dacă $\lambda_2 = 0$, în mod necesar $\lambda_1 < 0$, deci $\| (\lambda 1_X - T) \|^2 \geqslant \lambda_1^2 \| x \|^2$, și $(\lambda 1_X - T)$ rezultă inversabil. Dacă $\lambda_2 \neq 0$ atunci $\lambda_1^2 \| x \|^2 - 2\lambda_1 \langle Tx, x \rangle + \| Tx \|^2 \geqslant 0$ deci $\| \lambda 1_X - T \|^2 \geqslant \lambda_2^2 \| x \|^2$. O inegalitate asemănătoare are loc și pentru $(\lambda 1_X - T)^*$, ceea ce dovedește că, în această situație, $\lambda 1_X - T$ este inversabil, demonstrînd că $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$. b $\Rightarrow$ c. Deoarece $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$, rezultă că există $f(T) = S$, unde $f(\lambda) = \lambda^{1/2}$. Deoarece $f(\lambda) \geqslant 0$, $\forall \lambda \in [0, +\infty)$, urmează că S este autoadjunct. Rezultă ușor $S^2 = f(T)f(T) = (f \circ f)(T) = T$. c $\Rightarrow$ d. Evident. d $\Rightarrow$ a. Evident.

22. a) Deoarece $f_i(\mathbf{R}) \subseteq [0, +\infty)$, din exercițiul 21 deducem că $f_i(T)$ sînt autoadjuncți pozitivi ($i = 1, 2, 3$). $T = T^+ - T^-$ rezultă din $f_1(t) - f_2(t) = t$, $\forall t \in \mathbf{R}$, iar $|T| = T^+ + T^-$ rezultă din $f_1(t) + f_2(t) = |t|$, $\forall t \in \mathbf{R}$. b) Fie $x \in X$ și $x = x_1 + x_2$, unde $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(T^+)$, $x_2 \in \mathrm{Ker}\,(T^+)^\perp$. Avem $PT^+x = PT^+x_2 = T^+x_2$, căci $T^+x_2 \in \mathrm{Ker}(T^+)^\perp$. Apoi $T^+PX = T^+x_2$, deci $PT^+ = T^+P$. Apoi, din $f_1(t)f_2(t) = 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, deducem $T^+T^-x = T^-T^+x = 0$, $\forall x \in X$, ceea ce arată că $T(\mathrm{Ker}(T^+)) \subseteq \mathrm{Ker}(T^+)$ și $T^-(\mathrm{Ker}(T^+)^\perp) \subseteq \mathrm{Ker}\,(T^+)$. Cu aceasta, $PT^- = T^-P$. Ținînd seama de relațiile de la a), deducem $PT = TP$ și $P|T| = |T|P$. În sfîrșit, $(1 - P)T^+ = T^+ - PT^+ = T^+ - T^+P = T^+(1 - P)$. Analog se stabilesc și celelalte relații. c) Conform exercițiului VIII.42, este suficient să arătăm că $S(\mathrm{Ker}(T^+)) \subseteq \mathrm{Ker}(T^+)$. Deoarece S este autoadjunct, va urma $SP = PS$. Dacă $p \in \mathbf{C}[X]$ este oarecare, din $ST = TS$ rezultă $S \cdot p(T) = p(T) \cdot S$. Prin trecere la limită vom avea deci $ST^+ = T^+S$. Dacă $T^+x = 0$ atunci $T^+Sx = ST^+x = 0$, adică $Sx \in \mathrm{Ker}(T^+)$, ceea ce încheie demonstrația.

23. a) Deoarece $T \cdot p(T) = p(T) \cdot T$, pentru orice polinom $p \in \mathbf{C}[X]$, deducem $T|T| = |T|T$. Deoarece $f_3(t) \geqslant t$ și $f_3(t) \geqslant -t$, $\forall t \in \mathbf{R}$, rezultă $|T| \geqslant T$ și $|T| \geqslant -T$. Fie acum S operator autoadjunct, cu proprietățile: $ST = TS$, $S \geqslant T$ și $S \geqslant -T$. Arătăm că $S \geqslant |T|$. Deoarece $P \geqslant 0$ și $1 - P \geqslant 0$, avem: $S(1 - P) \geqslant T(1 - P) = T^+$ și $SP \geqslant -TP = T^-$, de unde $S = S(1 - P) + SP \geqslant T^+ + T^- = |T|$. Caracterizarea pentru T^+ este: „T^+ este cel mai mic operator autoadjunct S, care satisface: $ST = TS$, $S \geqslant T$ și $S \geqslant 0$". Caracterizarea pentru T^- este: „T^- este cel mai mic operator autoadjunct S, care satisface $ST = TS$, $S \geqslant -T$ și $S \geqslant 0$". În adevăr, din $T \cdot p(T) = p(T) \cdot T$, pentru orice polinom $p \in \mathbf{C}[X]$, deducem, prin trecere la limită, $T^+T = TT^+$ și $T^-T = TT^-$. Din $f_1(t) \geqslant t$ și $f_1(t) \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, deducem că T^+, T^- sînt autoadjuncți, pozitivi și $T^+ \geqslant T$, $T^- \geqslant -T$. În sfîrșit, dacă $S \geqslant T$ și $S \geqslant 0$, atunci: $S(1 - P) \geqslant T(1 - P) = T^+$, $SP \geqslant 0$, adică $S = S(1 - P) + SP \geqslant T^+$. Analog, din $S \geqslant -T$ și $S \geqslant 0$ urmează $SP \geqslant -TP = T^-$ și $S(1 - P) \geqslant 0$, adică $S = S(1 - P) + SP \geqslant T^-$. Verificăm că: $1/2(S + T + |S - T|) \leqslant S$ și $1/2(S + T + |S - T|) \leqslant T$, iar $\inf\{T, S\}$ este cel mai mare operator autoadjunct U, cu proprietățile: $U \leqslant S$, $U \leqslant T$, $US = SU$ și $UT = TU$. Primele două inegalități rezultă din: $S - T \leqslant |S - T|$ și $T - S \leqslant |S - T|$. Fie deci U cu proprietățile de mai sus. Vom avea: $U - 1/2(S + T) \geqslant S - 1/2(S + T) = 1/2(S - T)$; $U - 1/2(S + T) \geqslant T - 1/2(S + T) = 1/2(T - S)$, deci cu a): $U - 1/2(S + T) \geqslant 1/2|S - T|$, sau $U \geqslant \inf\{S, T\}$.

24. Condiția δ) arată că, pentru orice polinom $P \in \mathbf{R}[X]$, avem: $\langle P(T)x, y \rangle = \int_{-\|T\|}^{\|T\|} P(\lambda) \mathrm{d} \langle P_\lambda x, y \rangle$. Prin trecere la limită, deducem: $\langle f(T)x, y \rangle = \int_{-\|T\|}^{\|T\|} f(\lambda) \mathrm{d} \langle P_\lambda x, y \rangle$, pentru orice funcție continuă

$f \in \mathcal{C}([-\|T\|, \|T\|])$. Folosind γ), aplicația $\lambda \mapsto \langle P_\lambda x, y\rangle$ rezultă crescătoare și continuă la dreapta, deci, ținînd seama și de β), există, pentru fiecare $x, y \in X$, cel mult o aplicație $\lambda \to \langle P_\lambda x, y\rangle$. Deci există cel mult o aplicație $\lambda \mapsto P_\lambda$ cu proprietățile α) — δ).

25. a) Dacă $\lambda \leqslant \mu$, avem $T_\lambda \geqslant T_\mu$, deci $T_\lambda^+ \geqslant T_\lambda \geqslant T_\mu$. Deoarece $T_\lambda^+ \geqslant 0$ și, evident, comută cu T_μ, deducem că $T_\mu^+ \leqslant T_\lambda^+$. Ținînd seama că $\|T\| = \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid \|x\| \leqslant 1\}$, urmează $T \geqslant \|T\| 1_X$, de unde $0 \leqslant \|T\| 1_X - T$, adică $T_{\|T\|}^+ = 0$. b) Prin construcție, fiecare P_λ este proiector, deci α) are loc. De la a), pentru orice $\lambda \geqslant \|T\|$, avem $T_\lambda^+ \leqslant T_{\|T\|}^+ = 0$, deci $T_\lambda^+ = 0$. Rezultă $\mathrm{Ker}(T_\lambda^+) = X$, deci $P_\lambda = 1_X$ pentru $\lambda \geqslant \|T\|$. Deoarece $T \geqslant -\|T\| 1_X$, deducem că $T_{-\|T\|}^+ = T_{-\|T\|}$. Însă, pentru orice $\lambda < -\|T\|$, T_λ este inversabil, deci $\mathrm{Ker}\,(T_\lambda^+) = 0$, ceea ce arată că $P_\lambda = 0$ pentru $\lambda < -\|T\|$, deci are loc β). Să mai observăm că, din $\lambda \leqslant \mu \Rightarrow T_\lambda^+ \geqslant T_\mu^+$, urmează $\mathrm{Ker}\,(T_\lambda^+) \subseteq \mathrm{Ker}(T_\mu^+)$, deci $P_\lambda \leqslant P_\mu$. c) Dacă $\lambda < \mu$ atunci $P_\lambda \leqslant P_\mu$, deci: $P_\mu(P_\mu - P_\lambda) = P_\mu - P_\mu P_\lambda = P_\mu - P_\lambda$ și $(1 - P_\lambda)(P_\mu - P_\lambda) = P_\mu - P_\lambda P_\mu - P_\lambda + P_\lambda = P_\mu - P_\lambda$, ceea ce arată că: $(\mu 1_X - T)(P_\mu - P_\lambda) = -T_\mu(P_\mu - P_\lambda) = -T_\mu P_\mu(P_\mu - P_\lambda) = T_\mu^-(P_\mu - P_\lambda) \geqslant 0$ și $(T - \lambda 1_X)(P_\mu - P_\lambda) = T_\lambda(P_\mu - P_\lambda) = T_\lambda(1 - P_\lambda)(P_\mu - P_\lambda) = T_\lambda^+(P_\mu - P_\lambda) \geqslant 0$, adică inegalitățile propuse. d) Deoarece, pentru $\mu > \lambda$, avem $\mathrm{Ker}(T_\lambda^+) \subseteq \mathrm{Ker}(T_\mu^+)$, deducem $\mathrm{Ker}\,(T_\lambda^+) \subseteq \bigcap_{\mu > \lambda} \mathrm{Ker}\,(T_\mu^+)$.

Să notăm: $Q_\lambda x = \lim_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu > \lambda}} (P_\mu - P_\lambda)\, x$. Din $\lambda(P_\mu - P_\lambda) \leqslant T(P_\mu - P_\lambda) \leqslant \mu(P_\mu - P_\lambda)$ se obține, prin trecere la limită, $TQ_\lambda = \lambda Q_\lambda$, deci $T_\lambda Q_\lambda = (T - \lambda 1_X)\, Q_\lambda = 0$, adică $T_\lambda^+ Q_\lambda = (1_X - P_\lambda)\, T_\lambda Q_\lambda = 0$. Fie acum $x \in \bigcap_{\mu > \lambda} \mathrm{Ker}\,(T_\mu^+)$, deci $T_\mu^+ x = 0$, $\forall \mu > \lambda$, sau, echivalent, $P_\mu x = x$, $\forall\, \mu > \lambda$. Deducem: $Q_\lambda x = x - P_\lambda x$. Deoarece $T_\lambda^+ Q_\lambda x = 0$, urmează $P_\lambda Q_\lambda x = Q_\lambda x$, adică $P_\lambda(x - P_\lambda x) = x - P_\lambda x$, de unde: $x = P_\lambda x$, adică $x \in \mathrm{Ker}\,(T_\lambda^+)$. De aici deducem $P_\lambda Q_\lambda = Q_\lambda$. Însă avem: $(1 - P_\lambda)(P_\mu - P_\lambda) = P_\mu - P_\lambda$, deci, prin trecere la limită, $(1 - P_\lambda) Q_\lambda = Q_\lambda$, ceea ce implică $Q_\lambda = 0$, adică $\lim_{\mu \to \lambda} P_\mu x = P_\lambda x$, deci: $P_\lambda = \inf\{P_\mu \mid \mu > \lambda\}$ și γ) este verificată. e) Aplicînd inegalitatea de la c), obținem:

$$\mu_{k-1}(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}) \leqslant T(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}) \leqslant \mu_k\,(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}),$$

de unde:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}) \leqslant T\left(\sum_{k=1}^{n}(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})$$

sau:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}) \leqslant T \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}).$$

Deci, oricare ar fi $x \in X$:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}\langle (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})x,\ x\rangle \leqslant \langle Tx, x\rangle \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k \langle (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})x,\ x\rangle.$$

Avînd în vedere definiția integralei Riemann-Stieltjes:

$$\langle Tx, x\rangle = \int_{-\|T\|}^{\|T\|} \lambda \mathrm{d}\,\langle P_\lambda x, x\rangle,\ \forall\, x \in X,$$

de unde:

$$\langle Tx,\ y\rangle = \int_{-\|T\|}^{\|T\|} \lambda \mathrm{d}\langle P_\lambda\ x,\ y\rangle,\ \forall x,\ y\in X.$$

Pentru a demonstra δ), să observăm că: $(P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})(P_{\mu_h} - P_{\mu_{h-1}}) = 0$ dacă $h \neq k$, ceea ce arată că $\left[\sum_{k=1}^{n} \mu_k (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})\right]^m = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^m (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})$, de unde: $\sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}^m (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}}) \leqslant T^m \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k^m (P_{\mu_k} - P_{\mu_{k-1}})$, deci, cu cele de mai sus, rezultă: $\langle T^m x,\ y\rangle = \int_{-\|T\|}^{\|T\|} \lambda^m \mathrm{d}\langle P_\lambda x,\ y\rangle,\ \forall\ x,\ y\in X.$

26. Pentru fiecare $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, fie X_λ subspațiul liniar închis generat de toți vectorii proprii, care corespund la valori proprii $\mu \leqslant \lambda$. Notăm Q_λ proiectorul pe subspațiul X_λ. Definim apoi $Q_0 = \inf\{Q_\lambda \mid \lambda > 0\}$. Se constată fără dificultate că $\lambda \mapsto Q_\lambda$ satisface α); β) are loc, deoarece toate valorile proprii sînt în $[-\|T\|, \|T\|]$ și datorită exercițiului 9, după care $X_{\|T\|} = X$. γ) se verifică astfel: Dacă $\lambda < -\|T\|$ sau $\lambda \geqslant \|T\|$, evident $Q_\lambda = \inf\{Q_\mu \mid \mu > \lambda\}$. Prin definiție, aceeași relație are loc dacă $\lambda = 0$. Dacă $\lambda \neq 0$, există $\varepsilon > 0$, astfel încît pe $[\lambda, \lambda + \varepsilon)$ să nu existe nici o valoare proprie pentru T. Deducem $Q_\lambda = Q_\mu$, oricare ar fi $\mu \in [\lambda, \lambda + \varepsilon)$, deci γ) are loc. În sfîrșit, fie $x \in X$. Avem $x = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{\lambda_n} - Q_{\lambda_{n-1}})x$, de unde $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (Q_{\lambda_n} - Q_{\lambda_{n-1}})x$, ceea ce arată că $\langle Tx,\ y\rangle = \int_{-\|T\|}^{\|T\|} \lambda \mathrm{d}\langle Q_\lambda\ x,\ y\rangle$. Datorită exercițiului 24, deducem $Q_\lambda = P_\lambda$ și demonstrația este încheiată.

27. A se consulta [20].

28. Vom considera $X \times \mathbf{C}$ cu structura de spațiu liniar normat sumă directă. Să definim: $(x, \lambda)\cdot(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)$. Operația este corect definită, iar $:(x, 0)\cdot(y, 0) = (xy, 0)$. Apoi:
$(x + x', \lambda + \lambda')\cdot(y, \mu) = ((x + x')y + \mu(x + x') + (\lambda + \lambda')y, (\lambda + \lambda')\mu)) =$
$= (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu) + (x'y + \mu x' + \lambda' y, \lambda'\mu) = (x, \lambda)\cdot(y, \mu) + (x', \lambda')(y, \mu)$
și: $(x, \lambda)[(y, \mu)\cdot(z, \nu)] = (x, \lambda)(yz + \nu y + \mu z, \mu\nu) = (xyz + \nu xy + \mu xz + \lambda yz +$
$+ \lambda\nu y + \lambda\mu z + \mu\nu x, \lambda\mu\nu) = [(x, \lambda)\cdot(y, \mu)](z, \nu)$, deci $X \times \mathbf{C}$ este organizat ca algebră. Deoarece $(x, \lambda)(0,1) = (x, \lambda)$, rezultă că $(0,1)$ este unitate. În sfîrșit:
$\|(x, \lambda)\cdot(y, \mu)\| = \|xy + \mu x + \lambda y\| + |\lambda\mu| \leqslant \|x\|\|y\| + |\mu|\|x\| + |\lambda|\|y\| +$
$+ |\lambda|\cdot|\mu| = (\|x\| + |\lambda|)(\|y\| + |\mu|)$,
ceea ce arată că $X \times \mathbf{C}$ este algebră normată. Ultima afirmație este valabilă la orice sumă directă de spații normate.

29. a) Avem: $\|e\| = \|e\cdot e\| \leqslant \|e\|\|e\|$ și, deoarece $e \neq 0$, urmează $\|e\| \geqslant 1$.

b) Avem: $U_x(\lambda y + \mu y') = x(\lambda y + \mu y') = \lambda xy + \mu xy' = \lambda U_x(y) + \mu U_x(y')$ și $\|U_x(y)\| = \|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$, deci $U_x \in L(X)$, $\forall x \in X$. Analog se arată că $V_x \in L(X)$. Apoi: $U_{\lambda x + \mu x'}(y) = (\lambda x + \mu x')y = \lambda xy + \mu x'y = \lambda U_x(y) + \mu U_{x'}(y)$ și: $U_{xx'}(y) = (xx')y = x(x'y) = U_x(x'y) = U_x U_{x'}(y)$, ceea ce arată că $x \mapsto U_x$ este un omomorfism de algebre. Analog se arată pentru $x \mapsto V_x$. Deoarece $U_x(e) = x = V_x(e)$, rezultă că aplicațiile considerate sînt injective. În sfîrșit, avem $U_e(x) = x = V_e(x)$. c) Avem: $U_x V_y(z) = U_x(zy) = xzy = V_y(xz) = V_y U_x(z)$, deci $U_x V_y = V_y U_x$. Fie acum $T \in L(X)$ astfel încît

$TV_y = V_yT$, $\forall y \in X$. Deci: $TV_y(e) = V_yT(e)$, ceea ce se scrie: $T(y) = (Te)y$, $\forall y \in X$, adică $T = U_{Te}$. Unicitatea este clară. d) Este evident că $\|\cdot\|_1$ este normă, deoarece $L(X)$ este spațiu normat. În plus: $\|U_x\| \leqslant \|x\|$ și $\|e\|_1 = \|U_e\| = 1$. Fie $T \in L(X)$ astfel încît există $x_n \in X$ cu $U_{x_n} \to T$. Deoarece $U_{x_n}V_y = V_yU_{x_n}$, urmează $TV_y = V_yT$, deci $T = U_x$. Rezultă că $\{U_x \mid x \in X\}$ este închis în $L(X)$, deci este spațiu Banach. Deci $(X, \|\cdot\|_1)$ este spațiu Banach, iar normele $\|\cdot\|$ și $\|\cdot\|_1$, fiind comparabile, rezultă echivalente.

30. a) Fie $xx' = x'x = x + x'$ și $xx'' = x''x = x + x''$. Deducem: $x'(xx'') = x'(x + x'') = x'x + x'x''$ și $x'(xx'') = (x'x)x'' = (x + x')x'' = xx'' + x'x''$, de unde $x'x = xx''$, deci: $x + x' = x + x''$, adică $x' = x''$. b) Fie X cu element unitate e. Dacă există adversul x', atunci $xx' = x + x'$, deci $(x - e)x' = x$; iar $x'x = x + x'$, deci $x'(x - e) = x$, de unde, în mod necesar, $x' = -x(e - x)^{-1}$. c) Dacă $\|x\| < 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ este normal convergentă. X fiind spațiu Banach, fie $x' = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Avem: $xx' = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = x'x = x + x'$, deci x' este adversul lui x.

31. a) Se știe că $L(X)$ este algebră Banach necomutativă, cu element unitate. Se definim involuția $T \mapsto T^*$. Proprietățile 1) —4) sînt cunoscute. Apoi: $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$. Oricare ar fi $x \in X$, avem: $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*Tx\| \|x\| \leqslant \|T^*T\| \|x\|^2$, de unde $\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\|$. Deci are loc și 5). b) Se știe că $\mathcal{C}(X)$ este algebră Banach comutativă, cu element unitate. Să definim $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $\forall t \in K$. Evident $f^* \in \mathcal{C}(K)$. Avem: $f^{**}(t) = \overline{f^*(t)} = f(t)$, $\forall t \in K$; $(f + g)^*(t) = \overline{(f + g)(t)} = f^*(t) + g^*(t)$, $\forall t \in K$; $(\lambda f)^*(t) = \overline{\lambda f(t)} = \bar{\lambda} f^*(t)$, $\forall t \in K$; $(fg)^*(t) = \overline{f(t)g(t)} = f^*(t)\, g^*(t) = g^*(t) f^*(t)$, $\forall t \in K$; $\|f^*f\| = \sup_{t \in K} |f^*(t)f(t)| = \sup_{t \in K} |f(t)|^2 = \|f\|^2$.

Dacă A este o C* — algebră comutativă, cu element unitate, definim caracterele lui A ca acele omomorfisme nenule de algebre $A \to \mathbf{C}$. Mulțimea caracterelor, notată K și numită spectrul lui A, este o parte compactă în A^*, cu topologia slabă, fiind închisă în sfera unitate. Se poate observa că mulțimea caracterelor este în bijecție cu mulțimea idealelor maximale ale lui A. Izomorfismul între A și $\mathcal{C}(K)$ este așa-numita transformată Gelfand: dacă $x \in A$, atunci $\rho(x) \in \mathcal{C}(K)$ se definește prin $\rho(x)(\chi) = \chi(x)$ (χ fiind un caracter).

32. Se poate consulta [17].

33. Se poate consulta [13].

34. U fiind unitar, avem $U^* = U^{-1}$. Folosind exercițiul 6, avem $\lambda \in \sigma(U) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(U^*) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(U^{-1}) \Leftrightarrow \bar{\lambda}^{-1} \in \sigma(U)$. Dacă am presupune $|\lambda| < 1$, ar urma $|\bar{\lambda}^{-1}| > 1 = \|U\|$, contradicție. Deci $|\lambda| = 1$.

35. Deoarece $\lambda \in \partial\sigma(T)$, există un șir $\lambda_n \in \rho(T)$ astfel încît $\lambda_n \to \lambda$. Deci există $(\lambda_n 1_X - T)^{-1}$, iar $(\lambda_n 1_X - T) \to (\lambda 1_X - T)$. Să notăm: $S_n = (\|(\lambda_n 1_X - T)^{-1}\|)^{-1} (\lambda_n 1_X - T)^{-1}$. Avem $\|S_n\| = 1$, deci există $y_n \in X$ astfel încît $\|y_n\| = 1$ iar $\|S_n y_n\| \geqslant 1/2$. Fie atunci $x_n = (\|S_n y_n\|)^{-1} S_n y_n$. Avem deci $\|x_n\| = 1$. Rămîne să arătăm că $(Tx_n - \lambda x_n) \to 0$. Însă $\|Tx_n - \lambda x_n\| = (\|S_n y_n\|)^{-1} \|(\lambda 1_X - T) S_n y_n\| \leqslant 2\|(\lambda 1_X - T)S_n\|$, iar $(\lambda 1_X - T)S_n = (\lambda - \lambda_n)S_n + (\lambda_n 1_X - T)S_n = (\lambda - \lambda_n)S_n + \|(\lambda_n 1_X - T)^{-1}\|^{-1} 1_X$; deci este suficient să arătăm că $\|(\lambda_n 1_X - T)^{-1}\| \to \infty$. Dar: $1_X = (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n 1_X - T)^{-1} + (\lambda_n 1_X - T)^{-1}(\lambda 1_X - T)$,

de unde: $\| 1_X - (\lambda_n 1_X - T)^{-1}(\lambda 1_X - T)\| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \, \| (\lambda_n 1_X - T)^{-1}\|$. Deoarece $(\lambda_n 1_X - T)^{-1}(\lambda 1_X - T)$ nu este inversabil, deducem $\| 1_X - (\lambda_n 1_X - T)^{-1} \cdot (\lambda 1_X - T)\| \geqslant 1$, deci $\| (\lambda_n 1_X - T)^{-1}\| \geqslant |\lambda_n - \lambda|^{-1}$, ceea ce arată că $\| (\lambda_n 1_X - T)^{-1}\| \to \infty$.

36. Avem: $\| x_n y_n - x_m y_m\| \leqslant \|x_n\| \|y_n - y_m\| + \| y_m\| \|x_n - x_m\|$. Orice șir Cauchy fiind mărginit, există $M \geqslant 0$ astfel încît $\| x_n\| \leqslant M$ și $\| y_n\| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există n_ε, astfel încît dacă $n, m \geqslant n_\varepsilon$, să avem $\| x_n - x_m\| < \varepsilon/2M$ și $\| y_n - y_m\| < \varepsilon/2M$, de unde $\|x_n y_n - x_m y_m\| < \varepsilon$.

37. Fie $\widetilde{X}$ completatul spațiului normat X. [Este suficient să verificăm că pe $\widetilde{X}$ se poate defini o structură de algebră normată, astfel încît incluziunea canonică $X \to \widetilde{X}$ să fie omomorfism de algebre. Fie $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{X}$. Definim $\widetilde{x} \cdot \widetilde{y}$ ca fiind elementul de reprezentant $\{x_n \cdot y_n\}$. Cu exercițiul 36, $\{x_n \cdot y_n\}$ este șir Cauchy. Dacă $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ și $\{y_n\} \sim \{y_n'\}$ atunci $\|x_n y_n - x_n' y_n'\| \leqslant \| x_n\| \cdot \|y_n - y_n'\| + \| y_n'\| \|x_n - x_n'\|$, ceea ce arată că $\{x_n y_n\} \sim \{x_n' y_n'\}$. Deci operația introdusă este corect definită. Faptul că $\widetilde{X}$, înzestrat și cu această operație, este o algebră, urmează imediat din faptul că X este algebră. În plus, $\|\widetilde{x} \cdot \widetilde{y}\| = \lim\limits_{n \to \infty} \|x_n y_n\| \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} \| x_n\| \|y_n\| = \| \widetilde{x}\| \|\widetilde{y}\|$ arată că $\widetilde{X}$ este algebră normată. În sfîrșit, dacă $x \in X$, iar $\varphi(x)$ este clasa șirului constant $x_n = x$, atunci, prin construcție, $\varphi(x)\varphi(y)$ va fi clasa șirului constant xy, ceea ce arată că incluziunea $X \to \widetilde{X}$ este omomorfism de algebre.

INDEX DE NOTAȚII

$\mathcal{P}(T)$	Cap 0	τ_v	I 13	$\mathcal{K}(X)$	VI 11
X^T	„	Ker p	II 3	$d_x f$	VI 17
δ_{ij}	„	p_K	II 5	$\sigma(X,Y)$	VII 1
∂A	„	$\mathcal{C}^\infty$ (Ω)	II 6	M°	VII 2
supp f	„	$\bigoplus_{i\in I} X_i$	III 29	$^\circ N$	VII 4
$d(x, A)$	„	P_A	III 43	$BV_\circ$	VII 15
N	„				
Z	„	s	III 58	$G(x_1,\ldots,x_n)$	VIII 8
Q	„	τ_s	IV 4	$\bigoplus_{i\in I} X_i$	VIII 12
R	„				
C	„	P_F	IV 5	$l^2(I)$	VIII 14
C $[X]$	„	$\mathcal{C}_0^\infty$ (Ω)	IV 9	J_X	VIII 16
co(A)	„	$\mathcal{C}_0^\infty$ (K, Ω)	IV 9	$T_1 \leqslant T_2$	VIII 32
$\varepsilon(A)$	„	$p_{K'}$, n	IV 9	$N(T)$	VIII 52
$\mathcal{D}(A)$	„	$\mathcal{D}(\Omega)$	IV 9	$\mathcal{H}(X_1, X_2)$	VIII 53
lim sup	„	δ_x	IV 10	v_K	VIII 56
lim inf	„	T_f	IV 10	$\bigoplus_{i\in I} T_i$	VIII 59
$\|k\|$	„	$vp\left(\frac{1}{t}\right)$	IV 10		
D^k	„	f'	IV 11	$H-L^2$	VIII 68
L^1_{loc} (Ω)	„	τ_B	IV 15	$\sigma_p(T)$	IX 1
Ker f	„	X_B	IV 21	$r(T)$	IX 7
T'	„	$P_{S,i}$	IV 27		
		T_a	IV 41	$f(T)$	IX 15
e_i^*	I 2	$\mathcal{C}^1([0,1])$	V 2	$T^+, T^-, \|T\|$	IX 22
A°	I 4	LIM	V 23	$W(T)$	IX 33
$^\circ B$	I 4	BV	V 28		
X^n	I 7	c_{00}	V 43		
$\mathcal{U}_\tau$	I 12				

INDEX TERMINOLOGIC

advers IX.30
algebră cu involuţie IX.31
C^*-algebră IX.31
descompunerea spectrală (a unui operator autoadjunct) IX.25
determinant Gram VIII.8
diferenţiabilă Fréchet VI.17
distribuţie IV.10
„ de tip funcţie IV.10
„ Dirac IV.10
„ Heaviside IV.11
exhaustiune cu compacte I.20
extremală (parte, punct) IV.28
formă sesquiliniară VIII.60
formă sesquiliniară pozitiv definită VIII.61
funcţie inferior semicontinuă cap. 0
funcţională liniară pozitivă VI.10
Gram (determinant) VIII.8
hiperplan cap.0
„ care separă strict III.45
„ care separă tare IV.23
identitatea paralelogramului VIII.5
involuţie IX.31
topologie limită inductivă IV.8
matrice asociată unui operator I.11
metrică invariantă la translaţii III.23
măsură Radon VI.10, 11
mulţime conexă prin linii frînte III.38
mulţime care absoarbe altă mulţime cap. 0
mulţime mărginită III.31
mulţime total mărginită III.39
mulţime simetrică cap. 0
operator Bernstein VI.15
operator compact VI.12
operator Fredholm VI.35
operator Hilbert-Schmidt VIII.53
operator mărginit inferior VIII.22
operator parţial izometric VIII.41
operator slab compact VII.35
parte extremală IV.28
punct extremal IV.28
prelungire prin liniaritate I.1
rang numeric IX.33
raza spectrală IX.7
simbolul lui Kronecker cap. 0
simetrică (mulţime) cap.0
sistem de vecinătăţi I.12
sistem fundamental de vecinătăţi I.15
semiprodus scalar V.19
semispaţiu cap.0
s.l.c. IV.1
s.l.t. III.1
s.l.t local mărginit III.46
s.l.t separat asociat IV.30
spaţiu Fréchet III.51
spaţiu bornologic IV.15
spaţiu Montel IV.6
spaţiu uniform convex V.25
spaţiu strict normat V.47
spaţiu tonelat IV.14
spectral mapping theorem IX.17
sumă directă de s.l.t. III.29
sumă directă hilbertiană VIII.12
sumă topologică III.53
suport (al unei funcţii) cap. 0
teorema lui Banach-Saks VIII.62
teorema bipolarei VII.4
teorema lui Clarkson V.26
teorema lui Eberlein-Smuljan VII.27
teorema lui Frobenius IX.27
teorema lui Lax-Milgram VIII.61
teorema lui Kolmogorov V.14
teorema lui Krein-Milman IV.28
teorema lui Tihonov I.19
teorema lui Schauder VII.32
tonou IV.14
topologia convergenţei punctuale III.36
topologia convergenţei punctuale a operatorilor VII.37
topologia convergenţei slabe a operatorilor VII.38
topologia discretă I.16
topologia grosieră I.16
topologia produs I.18
topologia tare IV.39
topologia σ III.36
transformatul Cayley VIII.30

BIBLIOGRAFIE

Referința de bază pentru prezenta culegere de probleme este lucrarea:
N. Gheorghiu. *„Introducere în analiza funcțională"*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1974; sau Centrul de multiplicare, Iași ,1972.

Trimiterile din text sînt la următoarele articole sau cărți:

[1] Barbu, V., Precupanu, Th. *„Convexitate și optimalitate în spații Banach"*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1975.

[2] Boboc, N., *„Funcții complexe"*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1969.

[3] Bourbaki, N. *„Topologie générale, livre III, ch. I"*, Hermann Cie Paris, 1958.

[4] Clarkson, J. *„Uniformly convex spaces"*, Trans. A.M.S., 40 (1936), pag. 396.

[5] Costinescu, O. *„Elemente de topologie generală"*, Ed. tehnică, București, 1969.

[6] Costinescu, O., Amihăesei, C., Bîrsan, T. *„Topologie generală. Probleme"*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1974.

[7] Creangă, I. și colectiv. *„Algebră liniară"*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1970.

[8] Cristescu, R. *„Elemente de analiză funcțională și introducere în teoria distribuțiilor"*, Ed. tehnică, București, 1966.

[9] Dachuna-Castelle, D. *„Contre-exemple à la propriété d'approximation"*, Seminaire Bourbaki 1972/73, no. 433, LNM 383, pag. 286.

[10] Bourbaki, N. *„Integration"*, Hermann Cie Paris, 1951.

[11] Enflo, P. *„A counter-exemple to the approximation problem in Banach spaces"*, Acta Math. 130 (1975), pag. 309.

[12] Ghika, Al. *„Analiză funcțională"*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1967.

[13] Hildebrandt, F. *„Über den numerischen Wertebereich eines Operatoren"*, Math. Ann. 163 (1966), pag. 230—247.

[14] Niculescu, C., Popa, N. *„Elemente de teoria spațiilor Banach"*, Ed. Academiei R. S. R., București, 1981.

[15] James, R.C. *„A non-reflexive Banach space, isometric with its second conjugate space"*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 37 (1951), pag. 174.

[16] Klee,V. *„Invariant metrics on groups"*, Proc. A.M.S. 3 (1952), pag. 484.

[17] Naimark, M.A. *„Inele normate"*, vol I, II, III, Academia R.S.R., Institutul de studii româno-sovietice, București, 1957.

[18] Precupanu, A. *„Analiză matematică. Funcții reale"*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1976.

[19] Price, G.B. *„On the extreme points of convex sets"*, Duke Math. J. 3 (1937), pag. 56.

[20] Rickart, G.E. *„General theory of Banach algebras"*, Van Nostrand, 1960.

Pe lîngă lucrările [8], [12] pot fi consultate cu folos următoarele manuale de analiză funcțională, apărute în limba română:

Cristescu R. *„Analiză funcțională"*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1970.
Marinescu G. *„Spații vectoriale normate"*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1956.
Muntean I. *„Analiză funcțională"*, Univ. „Babeș-Bolyai", Cluj, 1973.
Nicolescu M. *„Funcții reale și elemente de analiză funcțională"*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1962.